



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO INTERDISCIPLINARIO DE INVESTIGACIÓN PARA EL
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL UNIDAD OAXACA

Maestría en Ciencias en Conservación
y Aprovechamiento de Recursos Naturales
(INGENIERÍA)

Modelado poroelástico del transporte de masa y calor en tubérculos durante el secado convectivo

Tesis que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

Presenta:

Mario Díaz González

Director de Tesis:

PhD. Sadoth Sandoval Torres

Julio, 2017



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 14:00 horas del día 18 del mes de Mayo del 2017 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CIIDIR-OAXACA para examinar la tesis titulada:

"Modelado poroelástico del transporte de masa y calor en tubérculos durante el secado convectivo"

Presentada por el alumno:

Díaz	González	Mario
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro:

A	1	5	0	0	0	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

Maestría en Ciencias en Conservación y Aprovechamiento de Recursos Naturales

Después de intercambiar opiniones, los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director(a) de tesis

Dr. Sadoth Sandoval Torres

Dr. Juan Rodríguez Ramírez

Dr. Pedro Montes García

Dr. Lilia Leticia Méndez Lagunas

Dr. Luis Gerardo Barriada Bernal

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Salvador Isidro Belmonte Jiménez



CENTRO INTERDISCIPLINARIO
DE INVESTIGACIÓN PARA EL
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL
C.I.I.D.I.R.
UNIDAD OAXACA
I.P.N.

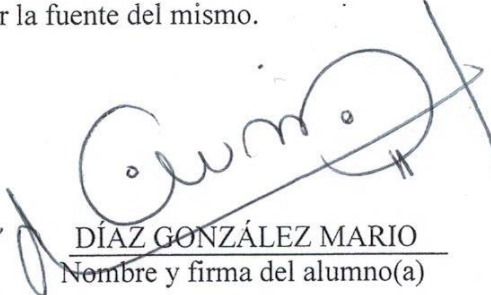


INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 18 del mes de mayo del año 2017, el (la) que suscribe DÍAZ GONZÁLEZ MARIO alumno(a) del Programa de Maestría en Ciencias en Conservación y Aprovechamiento de Recursos Naturales, con número de registro A150006, adscrito(a) al **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional Unidad Oaxaca**, manifiesto(a) que es el (la) autor(a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del (de la, de los) **Dr. Sadoth Sandoval Torres** y cede los derechos del trabajo titulado **“Modelado poroelástico del transporte de masa y calor en tubérculos durante el secado convectivo”**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del (de la) autor(a) y/o director(es) del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones posgradoax@hotmail.com, ing.mariodiaz@outlook.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el correspondiente y citar la fuente del mismo.


DÍAZ GONZÁLEZ MARIO
Nombre y firma del alumno(a)

Resumen

En el presente trabajo se propone un modelo matemático capaz de predecir la deformación en cilindros de papa (*Solanum tuberosum*) sometidos a un proceso de secado convectivo a temperaturas de 40, 50 y 60°C, con humedad relativa y velocidad de aire constantes (25% y 1.5 m/s, respectivamente). El modelo considera la conservación de masa y calor acoplada a un modelo de mecánica de sólidos basado en la teoría poroelástica de Biot. El acoplamiento considera los cambios de presión causados por la migración de agua líquida y las deformaciones sufridas por el material como consecuencia de los cambios de tensión en la interacción fluido-sólido. Para el cómputo de la presión de vapor en el material se incluyeron las isotermas de desorción del tubérculo. Para el modelo poroelástico fueron considerados parámetros mecánicos del material, tales como los parámetros de Lamé, los módulos de Young y Poisson, además de una ecuación de conservación de Darcy para involucrar las presiones que ejerce la fase líquida en la matriz sólida.

Las simulaciones predicen el calentamiento y la pérdida de humedad desde un contenido de humedad inicial de 3.93 kg de agua/kg de materia seca hasta un contenido de humedad final de 0.26, para un proceso de secado de 25 horas, presentando errores cuadráticos medios de 0.002 y 0.084, respectivamente. El modelo simula los desplazamientos del material, los cuales son del orden de 10^{-6} m, y las deformaciones son simuladas en geometría 2D axisimétrica.

Abstract

The purpose of the present work was the formulation of a poroelastic model predicting the mass and heat transfer in potato cylinders during convective drying process. Experimental conditions were as follows: drying temperatures of 40, 50 and 60°C, relative humidity of 25%, and air velocity of 1.5 m/s. A Biot's poroelasticity theory has been involved, which includes appropriate mechanical parameters for potato (*Solanum tuberosum*), such as Lamé parameters, Young's modulus and Poisson's ratio.

Moisture loss and surface temperature were simulated and validated with experimental data. The model provides satisfactory agreement (MSE=0.084 kg of water/kg of dry solids and MSE=0.002°C, respectively). Displacements predicted by model were on the order of 10^{-6} m, and strains was simulated as a 2D axisymmetric geometry.

Agradecimientos

Al Doctor Sadoth Sandoval Torres, por la oportunidad de ser su alumno desde la residencia profesional, por su dirección, por su apoyo y por sus consejos, por mostrarse como un amigo en momentos difíciles.

A Emilio Hernández Bautista y equipo de trabajo.

Al sensei César Osorio, por enseñarme a enfrentar mis miedos.

A mi comité tutorial, personal docente y administrativo del CIIDIR Oaxaca.

Al CONACYT y al IPN por el financiamiento y apoyo para la realización de esta investigación.

A Dios, a mi familia y amigos.

Muchas gracias.

NOMENCLATURA

Símbolo Descripción

Subíndices

l	Líquido
r	Relativo(a)
s	Sólido
s	Superficie
vol	Volumétrico(a)
w	Agua
x	Eje/Dirección x
y	Eje/Dirección y
z	Eje/Dirección z
∞	Ambiente

Números adimensionales

Nu	Número de Nusselt
Pr	Número de Prandtl
Re	Número de Reynolds
Sc	Número de Schmidt
Sh	Número de Sherwood

Símbolo Descripción

Letras griegas

α_B	Coefficiente de Biot-Willis
ε	Deformación
λ	Calor latente (J/kg)
λ	1er parámetro de Lamé (Pa)
μ	2do parámetro de Lamé (Pa)
μ	Viscosidad (Pa s)
ν	Módulo de Poisson
π	Potencial osmótico (Pa)
ρ	Densidad (kg/m ³)
σ	Tensión (Pa)
v	Volumen molar (m ³ /mol)
ϕ	Porosidad
ψ	Potencial hídrico (Pa)
ω	Fracción másica

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	2
1.1 Introducción	2
1.2 Planteamiento del problema	3
1.3 Antecedentes	5
1.4 Justificación	10
1.5 Objetivos.....	11
1.5.1 Objetivo general	11
1.5.2 Objetivos específicos	12
1.6 Hipótesis	12
CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO.....	14
2.1 Generalidades del proceso de secado.....	14
2.2 Condiciones de operación en el proceso de secado.....	16
2.3 Condiciones de secado.....	19
2.3.1 Condiciones externas.....	19
2.3.2 Condiciones internas	20
2.4 Mecanismos de transporte presentes durante el secado convectivo	20
2.4.1 Mecanismos de transporte de masa	20
2.4.2 Transferencia de energía	23
2.4.2.1 Conducción de calor.....	23
2.4.2.2 Convección de calor	24

2.5 Actividad de agua.....	25
2.6 La papa como material de estudio.....	28
2.6.1 El medio poroso como medio continuo.....	29
2.6.2 Principios fundamentales de la mecánica del medio continuo....	31
2.7 Principios básicos de la mecánica de sólidos deformables	32
2.7.1 Deformación y encogimiento.....	32
2.7.2 Tipos de sólidos deformables.....	33
2.7.2.1 Comportamiento elástico.....	33
2.7.2.2 Comportamiento plástico	33
2.7.2.3 Comportamiento viscoso	34
2.7.3 Elasticidad lineal	34
2.7.4 Tensor de tensiones	35
2.7.5 Parámetros de Lamé	37
2.7.6 Módulos elásticos en función de los parámetros de Lamé	37
2.7.6.1 Módulo de Young.....	37
2.7.6.2 Módulo de rigidez.....	38
2.7.6.3 Módulo de Poisson.....	38
2.7.7 Ecuaciones constitutivas de Lamé-Hooke	38
2.7.8 Ecuaciones de equilibrio interno.....	40
2.7.9. Equilibrio en el contorno.....	41
2.7.10 Principio de la teoría poroelástica	41

2.7.10.1 Energía de deformación para materiales porosos.....	42
CAPÍTULO 3 MATERIALES Y MÉTODOS.....	45
3.1 Materiales	45
3.1.1 Selección del material.....	45
3.1.2 Preparación de las muestras	46
3.2 Metodología	47
3.3 Determinación del contenido de humedad inicial.....	50
3.4 Determinación del contenido de humedad en el equilibrio.....	51
CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL MODELO.....	54
4.1 Geometría.....	55
4.2 Estructura general	55
4.3 Ecuaciones de conservación.....	57
4.3.1 Ecuación de conservación de humedad.....	57
4.3.2 Ecuación de conservación de energía.....	58
4.3.3 Ecuación de conservación de aire seco.....	59
4.4 Ecuaciones de flux.....	59
4.4.1 Flux de la fase líquida.....	59
4.4.2 Flux de la fase gaseosa	68
4.4.3 Flux debido a los cambios de tensión en el material.....	70
4.5 Condiciones límite.....	71
4.6 Condiciones iniciales y parámetros de entrada	72

4.7 Ecuaciones constitutivas.....	74
4.7.1 Ecuaciones constitutivas de transporte.....	74
4.7.2 Ecuaciones constitutivas para el cálculo de coeficientes de transferencia.....	76
4.7.3 Ecuaciones constitutivas de mecánica de sólidos deformables...	77
4.8 Módulo poroelástico	78
4.8.1 Ecuación de conservación tensión-deformación.....	79
4.9 Implementación del modelo en COMSOL Multiphysics.....	80
CAPÍTULO 5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	84
5.1 Cinéticas de secado	84
5.1.1 Pérdida de humedad en el material.....	84
5.1.2 Evolución de la temperatura superficial.....	91
5.2 Análisis de la deformación en el material.....	93
5.2.1 Deformación axial y radial.....	95
5.2.2 Análisis de los módulos elásticos	97
5.3 Consideraciones para mejora del modelo poroelástico	103
5.4 Modelo poroelástico frente a otros modelos desarrollados	104
CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	109
BIBLIOGRAFÍA.....	111

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Evolución de la estructura celular de las muestras de papa a temperatura a 240°C a 0, 20 y 50 min.	17
Figura 2. a) Imagen de la estructura interna de una papa, donde se observan los poros y el esqueleto sólido formado por gránulos de almidón y paredes celulares y b) su interpretación.....	30
Figura 3. Diagrama del túnel de secado: 1) Generador de vapor. 2) Termohigrómetro. 3) Controladores. 4) Balanza. 5) Celda de carga. 6) Computadora.....	49
Figura 4. Esquema de la geometría utilizada en el modelo y su representación axisimétrica.	55
Figura 5. Estructura general del modelo y su acoplamiento.....	56
Figura 6. Estructura celular.....	65
Figura 7. Fronteras de la geometría en COMSOL Multiphysics.....	71
Figura 8. Enmallado utilizado para la simulación en COMSOL Multiphysics.	80
Figura 9. Constructor del modelo poroelástico en COMSOL Multiphysics...	81
Figura 10. Visualización de los parámetros de entrada del modelo.....	82
Figura 11. Visualización de la estructura de las definiciones del modelo.	82
Figura 12. Cinéticas de pérdida de humedad durante el secado de cilindros de papa a tres diferentes temperaturas: a) 40°C, b) 50°C y c) 60°C.....	85
Figura 13. Comportamiento de los porcentajes de error entre las cinéticas experimentales y las simuladas por el modelo a 40, 50 y 60°C.....	86
Figura 14. Cinéticas de contenido de humedad reducido a 40, 50 y 60°C...	87

Figura 15. Rapidez de secado reducido contra contenido de humedad reducido de las simulaciones del modelo a 40, 50 y 60°C.....	89
Figura 16. Cinéticas experimentales y simuladas de contenido de humedad en cilindros de papa durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.....	90
Figura 17. Perfiles de evolución de la temperatura experimentales y simulados en cilindros de papa durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.....	92
Figura 18. Evolución de la deformación volumétrica durante el proceso de secado convectivo de cilindros de papa a temperaturas de 40, 50 y 60°C.	94
Figura 19. Evolución de la deformación volumétrica respecto al contenido de humedad reducido durante el proceso de secado convectivo de cilindros de papa a temperaturas de 40, 50 y 60°C.....	95
Figura 20. Evolución de la altura (a) y radio (b) de los cilindros de papa el proceso de secado convectivo a temperaturas de 40, 50 y 60°C.....	96
Figura 21. Muestras de papa secadas a temperaturas de a) 40, b) 50 y c) 60°C.	97
Figura 22. Evolución del módulo de Young durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.....	98
Figura 23. Evolución del módulo de Poisson durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.....	99
Figura 24. Evolución del coeficiente de compresibilidad durante el secado de cilindros de papa a 60°C.....	101
Figura 25. Evolución del contenido de humedad (en base seca) y dimensiones del material (m) a tiempos de a) 5 horas, b) 10 horas, c) 15 horas y d) 20 horas, durante el secado de cilindros de papa a 50°C....	102

Figura 26. Cinéticas de contenido de humedad reducido del secado de cilindros de papa a temperatura de 60°C y velocidad de aire de 1.5 m/s.	105
Figura 27. Evolución del diámetro de las muestras del secado de cilindros de papa a temperatura de 60°C y velocidad de aire de 1.5 m/s.....	106
Figura 28. Cinéticas de contenido de humedad reducido del secado de cilindros de papa a temperatura de 72°C y velocidad de aire de 0.25 m/s.	107
Figura 29. Evolución del radio de las muestras del secado de cilindros de papa a temperatura de 72°C y velocidad de aire de 0.25 m/s.....	107

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Principios fundamentales de la mecánica del medio continuo	32
Tabla 2. Tratamientos y repeticiones de los experimentos.	48
Tabla 3. Condiciones límite de las ecuaciones de conservación.	72
Tabla 4. Condiciones iniciales y parámetros de entrada del modelo.....	72
Tabla 5. Ecuaciones constitutivas de transporte.....	74
Tabla 6. Ecuaciones constitutivas para el cálculo de coeficientes de transferencia.....	76
Tabla 7. Ecuaciones constitutivas de mecánica de sólidos deformables.	77

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La producción de alimentos deshidratados es hoy en día uno de los sectores más importantes de la industria de alimentos. Representa el 10% de la producción de la industria alimentaria, superada únicamente por la producción de alimentos enlatados y por la de alimentos congelados (IBISWorld, 2014). Debido a su importancia, diversas investigaciones han tratado de describir los fenómenos físicos que se producen durante el secado utilizando herramientas específicas, como los modelos matemáticos. Sin embargo, durante la deshidratación de un alimento, la temperatura, la humedad o su estructura pueden cambiar, y como consecuencia también cambian sus propiedades físicas de forma continua. Una simulación realista del proceso de secado de alimentos requiere una estimación dinámica de las propiedades físicas, ya que éstas continúan cambiando durante el desarrollo del proceso (Gulati y Datta, 2013).

El encogimiento de los materiales de origen biológico, como lo son los productos agroalimentarios, es un fenómeno común desarrollado durante el proceso de secado. La importancia del estudio del encogimiento de los materiales que son sometidos al proceso de secado radica principalmente en que a escalas de producción industrial, un encogimiento excesivo de los materiales limita la transferencia de masa y reduce la rapidez de evaporación, incrementando los tiempos de operación, y por consiguiente, aumenta el consumo energético (Koç *et al.*, 2008). El presente trabajo se centra en el desarrollo de un modelo matemático, basado en principios termodinámicos y fenomenológicos de secado de papa

(*Solanum tuberosum*) que describa los mecanismos de transporte de masa y calor, involucrando el encogimiento del material por medio de la teoría poroelástica.

1.2 Planteamiento del problema

El secado convectivo es un proceso complejo que implica la reducción del contenido de humedad de un material para prolongar su vida de anaquel y facilitar su transportación. Los factores que afectan la vida de anaquel (presencia de patógenos y toxinas) y la calidad de los alimentos (porosidad, distribución de tamaños de poros, textura, color) son funciones del estado del alimento (temperatura, contenido de humedad, composición) y su procesamiento (Dhall y Datta, 2011).

Los modelos de secado de alimentos son herramientas de simulación fiables, capaces de predecir la influencia de las condiciones de operación en las características finales de los alimentos secos y en el rendimiento del proceso sin la necesidad de realizar experimentos que implican un alto consumo de energía y costos elevados (Curcio y Aversa, 2014). La mayoría de los modelos matemáticos que describen el secado implican ecuaciones de transferencia de masa y calor, con condiciones iniciales y condiciones frontera adecuadas.

Existen diversos modelos de secado convectivo en la literatura, los cuales predicen la distribución de humedad y temperatura de diversos alimentos, en diferentes geometrías, diferentes composiciones, y en diferentes condiciones ambientales. En la mayoría de estos modelos, una de las suposiciones principales es que el encogimiento que sufren los materiales durante el secado es despreciable. Sin embargo, este supuesto no puede considerarse válido para los

agroalimentos, debido a que el agua es el componente principal de estos y por tanto, al ser removida causa una disminución de tamaño importante (Curcio y Aversa, 2014). Además, el encogimiento que sufren los agroalimentos durante el secado provoca cambios en la estructura del material a través de cambios en la geometría y la porosidad, lo cual limita el transporte de masa y calor, que a su vez afecta a las propiedades mecánicas y termofísicas, debido a que estas son funciones de la humedad y del estado del material (Gulati y Datta, 2015).

Por otro lado, existen modelos de secado que si consideran el encogimiento, pero en su mayoría asumen el encogimiento como una correlación o como una función de algún parámetro específico, asumiendo que el encogimiento se da en una sola dirección, o bien, que es igual en todas las direcciones, lo cual no ocurre en la realidad, pues las evidencias experimentales de secado convectivo han demostrado que el encogimiento de materiales biológicos no se presenta de forma homogénea.

El transporte de masa y calor en el secado de materiales deformables se ha estudiado ampliamente, y para involucrar la deformación no homogénea que sufren los materiales, diversas investigaciones se han apoyado de la teoría poroelástica, la cual estudia el comportamiento de los materiales elásticos cuyos poros están ocupados por un fluido. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones se han centrado en aplicaciones no alimentarias, tales como geomateriales (suelos, rocas, hormigón, cerámica), biomateriales (tejidos de plantas y animales), geles y polímeros (Gulati y Datta, 2013).

Existe una problemática real en el desarrollo de modelos matemáticos de secado convectivo. Es necesario desarrollar un marco mecanístico que considere el encogimiento no homogéneo que presentan los agroalimentos durante el

secado, para poder acoplarse a un modelo matemático que mejore la predicción de las propiedades finales de los productos y el proceso mismo.

Involucrar el encogimiento por medio de la teoría poroelástica en un modelo matemático podrá describir mejor el transporte masa y energía en los alimentos que son sometidos al secado convectivo.

1.3 Antecedentes

En años recientes, el modelado matemático se ha convertido en una herramienta esencial para el desarrollo, diseño, optimización y control de procesos de la industria alimentaria. Diversas investigaciones sobre secado convectivo de alimentos, específicamente de papa, están enfocadas a modelos matemáticos para comprender los fenómenos de transporte de masa y calor que ocurren durante el proceso. De acuerdo con Putranto y Chen (2013), estos modelos pueden clasificarse en dos grupos: empíricos y mecanísticos.

Los modelos empíricos son correlaciones que se obtienen a partir de datos experimentales a condiciones específicas. Este tipo de modelos son ideales para la rápida predicción debido a que no son modelos robustos.

Un ejemplo de modelo empírico es el método de la curva característica (DDC), utilizado por Sandoval y Allier (2015) para simular las cinéticas de secado de rodajas de papa a velocidades de aire de 1.0 y 2.2 m/s a 60 °C y 30% de humedad relativa. El método DDC modela la cinética de secado a partir de datos experimentales y de la conceptualización de las diferentes fases presentes en el secado, considerando una rapidez de secado de referencia y estableciendo la

hipótesis de que los mecanismos dependen principalmente del potencial del contenido de humedad reducido. Los autores tomaron en cuenta que el flujo másico y la evolución térmica presentan una dependencia lineal y una no lineal, obteniendo simulaciones con sumas de errores cuadráticos medios de 0.181 y 0.0392 para 1.0 y 2.2 m/s, respectivamente.

Sin embargo, los modelos empíricos no describen la física del secado. El segundo grupo de modelos, denominados mecanísticos, están basados en leyes físicas y explican los mecanismos de transporte que tienen lugar durante el proceso. Este tipo de modelos son representados por medio de ecuaciones diferenciales parciales que describen la dependencia del contenido de humedad y la temperatura respecto al tiempo y la posición.

La investigación de Sandoval y Allier (2015), complementa el método DCC con un modelo mecanístico que considera la fase líquida y vapor del material y el aire presente en el proceso de secado. El modelo involucra las leyes físicas de Fick y Darcy, pues considera que la difusión y la capilaridad son las que rigen el proceso. La simulación describe correctamente la cinética de la corrida experimental con velocidad de aire de 2.2 m/s, pero a 1.0 m/s presenta una notable desviación. Los autores advierten sobre la importancia de involucrar el encogimiento que sufren los materiales para obtener modelos matemáticos más precisos, ya que la reducción del área de intercambio debida al encogimiento limita la transferencia de los flujos masa y de calor.

Aunado a lo sugerido por Sandoval y Allier, el encogimiento de los materiales sometidos al proceso de secado representa un factor que afecta las propiedades organolépticas y, por tanto, la calidad del producto final. Además, el modelado preciso de los mecanismos de transporte en materiales alimenticios

requiere conocimiento de las propiedades de transporte, las cuales dependen del estado del material, por lo cual es importante considerar las modificaciones de forma y estructura que sufren los materiales durante el proceso de secado. Por ejemplo, el transporte de humedad en los tejidos celulares depende de la vía que utiliza (intracelular o extracelular), la cual es dependiente de la temperatura. Halder *et al.* (2010) demostraron por medio de una combinación de mediciones y análisis de permeabilidad, distribución de tamaño de poro y bioimpedancia en muestras de papa, que el transporte de humedad en materiales biológicos se da principalmente de forma intracelular cuando la temperatura de secado es menor que la temperatura a la que las membranas se encontrarían intactas (52°C). Por otro lado, durante el secado a altas temperaturas (mayores a 52°C), las membranas celulares de la papa son dañadas, produciéndose un encogimiento en el material, el cual provoca que la vía de transporte de la humedad sea principalmente extracelular, es decir, a través de espacios intercelulares y espacios que son creados por las células muertas a causa de las altas temperaturas, lo cual ocasiona una resistencia mucho menor para el transporte de agua.

Debido a su importancia, diversos autores han desarrollado modelos matemáticos de transferencia de masa y calor que consideran el encogimiento.

Algunas investigaciones, consideran el encogimiento como una correlación semi-empírica, pues relacionan el encogimiento a funciones dependientes de una o más variables. Un ejemplo es el desarrollado por Wang y Brennan (1995) el cual describe la distribución de humedad y temperatura interna de placas de papa durante el secado a una velocidad de aire de 4.0 m/s y temperaturas de 40, 50, 60 y 70°C. En su modelo, Wang y Brennan consideran el encogimiento del espesor como una función de la pérdida del contenido de humedad, obteniendo predicciones con un error del 5% al comparar los resultados de la correlación frente a los datos

experimentales. Los autores aseguran que el encogimiento no debe ser considerado como un factor despreciable en la formulación de modelos predictivos.

Otro modelo de este tipo es el desarrollado por Aprajeeta *et al.* (2015), que describe el efecto del encogimiento durante el secado de rodajas de papa a una velocidad de aire de 0.25 m/s y una temperatura de 62°C. Este trabajo involucra el encogimiento como una correlación entre la porosidad y el contenido de humedad, utilizando una geometría 2D axisimétrico. Al comparar los resultados predictivos frente a los experimentales, encontraron que existe una relación lineal del encogimiento radial de las muestras de papa respecto al tiempo. Sin embargo la velocidad de aire utilizada es muy baja y sería conveniente aclarar que el autor se refiere a un secado por convección natural, además de que no especifica la humedad relativa utilizada.

Por otro lado, existen modelos que para involucrar el encogimiento se basan en la mecánica estructural. Este enfoque se caracteriza por incluir el balance de cantidad de movimiento del material y por usar leyes mecánicas como la de Ley de Hook con el fin de establecer una relación constitutiva entre los estreses y tensiones del material con el encogimiento. Este tipo de modelos suelen partir de suposiciones, tales como considerar a los materiales como sistemas elásticos, plásticos y viscosos.

Entre los autores que han utilizado la mecánica estructural, se encuentran Curcio y Aversa (2014), quienes desarrollaron un modelo mecanístico, ya que toma en cuenta el encogimiento como un cambio anisotrópico en las dimensiones de cilindros de papa, a condiciones de velocidades de aire de 2.2 y 2.8 m/s, temperaturas de 70 y 85 °C y un rango de humedad relativa entre el 35 y 50%,

asumiendo que la papa presenta un comportamiento elastoplástico dentro de una región de baja tensión para poder involucrar la Ley de Hooke. El modelo desarrollado por Curcio y Aversa predice el encogimiento del espesor y diámetros de las muestras de papa con una desviación máxima del 10%.

Otro modelo de este tipo, es el de Dhall y Datta (2011), quienes desarrollaron un modelo basado que asumen que la deformación es efecto de la pérdida de humedad y del desarrollo de presión de gas en el material. Ellos proponen que la fase sólida se comporta como un material hiperelástico incompresible, por lo que consideran válidas las ecuaciones de la ley de Hook. El encogimiento del material se evalúa como el cociente entre el volumen respecto al volumen inicial del material. Su modelo fue validado con los datos experimentales obtenidos por Wang y Brennan (1995), obteniendo buenos ajustes, pero al no disponer de los valores de error experimentales, no pudieron determinar la precisión de la simulación.

Yang *et al.* (2001) también involucra la mecánica estructural al simular el encogimiento en dos dimensiones, axial y radial de cilindros de papa, involucrando ecuaciones de campo de esfuerzos y asumiendo que el material presenta un comportamiento elastoplástico. La validación experimental se realizó con cilindros de papa de 1.5 cm de altura y 1.5 cm de radio, a una velocidad de aire de 1.6 m/s, temperatura de 60°C y humedad relativa de 5.4%, obteniendo un coeficiente de contracción de 53% en el eje axial y de 72% en el radial.

Los antecedentes expuestos revelan la necesidad de desarrollar modelos matemáticos más precisos, específicamente para la papa, debido a que son pocos los trabajos que han involucrado el encogimiento producido en los materiales a través de un marco conceptual de mecánica de sólidos, como la teoría

poroelástica. Acoplar el encogimiento por medio de la teoría poroelástica en un modelo matemático podrá describir mejor el transporte masa y energía en los alimentos que son sometidos al secado convectivo.

1.4 Justificación

El secado convectivo es uno de los procesos más utilizados para la conservación de agroalimentos. Debido a la remoción de agua (que en agroalimentos es el componente principal) facilita la transportación y manejo de los materiales secos, pues su masa disminuye de forma considerable. Además, con la eliminación de agua, se evita la degradación por microorganismos, pues en un alimento seco no existe el medio adecuado para la reproducción de los mismos. Los factores que afectan a la vida de anaquel y la calidad de los alimentos son funciones del estado del alimento y su procesamiento. La industria alimentaria se interesa por productos específicos, de fácil acceso y basta producción. Entre los agroalimentos con estas características encontramos a la papa.

La papa es el cuarto cultivo a nivel mundial después del maíz, el trigo y el arroz y se encuentra en más de 130 países. En México, el cultivo de papa se realiza en 24 entidades, lo cual lo convierte en uno de los cultivos más importantes del país (INEGI, 2007). En el año 2011, la producción de papa en México fue de 1,433,239 toneladas, de las cuales el 56% se comercializó como producto fresco y el 29% se utilizó para el sector industrial (SAGARPA, 2011). El procesamiento de papa a través del secado convectivo es una alternativa de consumo que ofrece un producto de buena calidad, de fácil transporte y acceso. La papa, al ser un material biológico constituido principalmente de carbohidratos y por tener un alto contenido de humedad, experimenta diferentes mecanismos de transferencia de

masa y calor que interactúan con su estructura interna en las diferentes etapas del secado, que afectan la estructura del material y provocan el encogimiento del producto final.

El modelado es una aplicación científica que toma en cuenta estos mecanismos, con la finalidad de mejorar la comprensión de los fenómenos que ocurren durante el proceso y de obtener predicciones que pueden reemplazar experimentos largos y costosos como una forma de optimización de un proceso o de la estructura de un producto (Jousse, 2008). Además, el modelado matemático es una herramienta esencial para otros casos como el diseño, escalamiento y control de procesos, evaluación y diseño de experimentos, solución de problemas y diagnósticos, determinación de cantidades que no pueden medirse de forma directa y para el desarrollo de estudios de factibilidad para determinar el potencial de un equipo antes de construirlo o adquirirlo (Rasmunson *et al.*, 2014). El desarrollo de un modelo matemático para el secado convectivo de papa que considere el encogimiento del material, ayudará a la predicción del estado e historia del alimento, y por consecuencia, podrá optimizarse el proceso y podrán mejorarse las características finales del producto seco.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Desarrollar un modelo matemático que describa el transporte de masa y energía durante el secado convectivo de papa (*Solanum tuberosum*) acoplado el encogimiento del material por medio de la teoría poroelástica.

1.5.2 Objetivos específicos

1. Desarrollar un modelo mecanístico basado en la mecánica del medio continuo, considerando el encogimiento del material como producto de los esfuerzos provocados por el sólido y el fluido (teoría poroelástica).
2. Determinar las cinéticas de secado experimentales para cilindros de papa a tres diferentes temperaturas, con humedad relativa y velocidad de aire constantes.
3. Obtener la solución numérica del modelo para comparar los datos experimentales contra los simulados para su verificación.

1.6 Hipótesis

Un modelo matemático de transferencia de masa y energía que acople el encogimiento del material por medio de la teoría poroelástica predecirá con mayor exactitud las cinéticas de secado convectivo de papa (*Solanum tuberosum*).

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO

2.1 Generalidades del proceso de secado

El secado es una de las técnicas más antiguamente utilizadas para la conservación de alimentos. Hoy en día la industria de alimentos deshidratados constituye un sector muy importante dentro de la industria alimentaria mundial. El tamaño de las instalaciones varía desde pequeños secadores solares hasta grandes y sofisticadas instalaciones de secado. En el mercado puede encontrarse una amplia variedad de productos deshidratados, tales como frutas, vegetales, carnes, pescados, cereales y productos lácteos.

Se entiende por secado la operación mediante la cual se elimina total o parcialmente el agua de la sustancia que la contiene. Esta definición puede ser aplicada a sólidos, líquidos o gases y tal como está expresada puede servir para describir varias operaciones unitarias como la evaporación, la adsorción, etc. Sin embargo, su tratamiento teórico y la tecnología empleada las diferencian completamente.

La mayoría de productos agroalimentarios son sólidos por lo que se define mejor el secado como la operación básica por la que el agua que contiene un sólido o una disolución (generalmente concentrada) se trasfiere a la fase fluida que lo rodea debido a los gradientes de actividad de agua (a_w) entre ambas fases.

El secado es una operación compleja. Implica la transferencia de calor y masa a lo largo de varios tipos de procesos, tales como transformaciones físicas o químicas, que, a su vez, puede causar cambios en la calidad del producto

(Mujumdar, 2008). El secado es una operación que requiere un alto consumo de energía, esto se debe al alto calor latente de vaporización del agua y a la ineficiencia inherente de utilizar aire caliente como medio de secado.

Estudios reportan que el sector industrial de operaciones de secado ocupa entre el 10 y el 15% del consumo nacional de la energía de Estados Unidos, Canadá, Francia y Reino Unido y un rango de entre el 20 y el 25% del consumo nacional de Dinamarca y Alemania (Mujumdar, 2008). El secado se produce por efectuar la vaporización del líquido mediante el suministro de calor a la materia prima húmeda. El calor puede ser suministrado por convección (secadores directos), por conducción (contacto o secadores indirectos), por radiación o volumétricamente mediante la colocación del material húmedo en el microondas o campos electromagnéticos de radiofrecuencia.

Más del 85% de los secadores industriales son de tipo convectivo con aire caliente o gases de combustión directa como medio de secado. Más del 99% de las aplicaciones en alimentos de secado implica la eliminación de agua. Todos los tipos de secado, deben suministrar calor a los límites del objeto de secado para que el calor se difunda en el sólido (principalmente por conducción). El líquido debe viajar a los límites de la materia antes de que sea transportado hacia fuera por el gas portador (o por aplicación de vacío para los secadores no convectivos).

El transporte de la humedad dentro del sólido puede producirse por diferentes mecanismos, siendo los más estudiados la difusión del líquido (si el sólido húmedo está a una temperatura por debajo del punto de ebullición del líquido o a temperaturas moderadas) y la difusión de vapor (si el líquido se vaporiza dentro del material)

Una de las ventajas principales del secado es reducir o erradicar completamente los posibles daños microbianos que pueden desarrollarse posteriormente a la cosecha y almacenamiento de los alimentos. Durante la cosecha y las siguientes etapas implicadas en el procesamiento, los productos alimenticios son propensos a diferentes tipos de daños que implican daños mecánicos, físicos, químicos y daños microbianos. El daño mecánico y físico puede contribuir a aumentar los daños químicos y microbianos (Rahman, 2001; Mujumdar, 2004).

Varias reacciones químicas ocurren durante el almacenamiento, sin embargo, la reducción en el contenido de humedad por debajo de cierto nivel puede reducir el daño microbiano de alimentos y materiales de secado y, acompañado de un tratamiento previo adecuado puede ayudar a reducir los daños químicos.

El secado de alimentos es uno de los procesos más usados en la industria alimentaria para mejorar la estabilidad de los productos, ya que decrece la actividad del agua del material, reduce la actividad microbológica y minimiza los cambios físicos y químicos durante su almacenamiento (Yadollahinia, 2009).

2.2 Condiciones de operación en el proceso de secado

Al igual que el encogimiento, las condiciones de secado también han sido motivo de estudio. Cuanto mayor es la temperatura de flujo de aire, el tiempo de secado es menor. Además, el efecto de acortar el tiempo de secado puede hacerse mayor al usar vapor sobrecalentado durante del proceso desecado (Iyota et al, 2001).

Cuando la materia a secar es papa, temperaturas de flujo de aire de entre 50 y 60°C favorecen el proceso de secado debido a que no aceleran la gelatinización de almidón en las muestras. Cuando las temperaturas de flujo de aire son elevadas la gelatinización se ve afectada directamente y por tanto, la estructura celular de la papa cambia de manera importante (Iyota et al, 2001) tal como se muestra en la Figura 1.

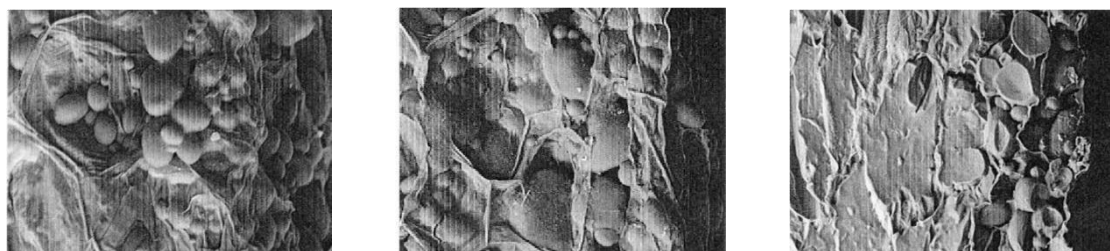


Figura 1. Evolución de la estructura celular de las muestras de papa a temperatura a 240°C a 0, 20 y 50 min.

Los parámetros del aire como la temperatura y la humedad relativa tienen un fuerte impacto en la calidad del producto final del secado. El secado con aire seco (humedad relativa baja) a temperaturas bajas (entre 50 y 60 °C) dan lugar a productos finales con buenas propiedades sensoriales, de color claro y de alta susceptibilidad a la rehidratación, mientras que el secado a una temperatura más alta (90°C en adelante) y con aire húmedo (humedad relativa alta) pierde sus atributos sensoriales y por tanto, aceptación comercial del producto (Iciek et al, 2009). El cambio en la microestructura del tejido de la papa durante el secado está ligado directamente al encogimiento de las muestras sometidas al proceso. El escaldado, que precede al secado, provoca la gelatinización del almidón y la hinchazón de las células. Una vez escaldadas las muestras, el tejido de las mismas

es compacto, las células están cerca unas de otras y no existe evidencia de paredes celulares rotas (Lewicki et al, 2005).

El secado por convección de aire caliente tiene como ventaja sobre otros tipos de secado que al rehidratar el producto final, las características sensoriales como textura, color y sabor siguen son muy similares a las del producto original (Setiady et al, 2009). En el secado por convección de aire, la velocidad de flujo del aire es el factor principal que afecta el cambio de volumen (Khraisheh et al, 1997). Para reducir el tiempo de secado, pueden utilizarse temperaturas altas de hasta 74°C. Sin embargo, para los productos alimenticios que tienden a ser sensibles a la temperatura, otra opción para reducir el tiempo de secado es adecuar las muestras de forma que la relación entre el área superficial y el volumen (A/V) sea de 2.3 a 0.16 mm^{-1} (May et al, 2002).

El proceso de secado es un fenómeno complejo que implica procesos de transferencia de cantidad de movimiento, calor y masa. Durante el proceso pueden desencadenarse reacciones químicas no deseables que repercuten en la calidad del producto final, así como en la pérdida de nutrientes que son arrastrados con el agua que abandona el alimento. En muchos casos, esta pérdida de nutrientes afecta la estructura del material ocasionando precipitación, o reacción con los solutos, lo que da lugar a reacciones de oxidación. Por tal razón, es importante conocer la estructura y composición del material.

La papa (*Solanum tuberosum*) es una planta de la familia de las solanáceas, cultivada en casi todo el mundo por su tubérculo comestible. La parte que se consume es su tubérculo, es decir, un engrosamiento subterráneo de los tallos

que sirve para almacenar sustancias de reserva. La papa es un tubérculo incluida dentro de las hortalizas o en el grupo de los feculentos o amiláceos.

2.3 Condiciones de secado

El proceso de secado y todos los mecanismos involucrados dependen de las condiciones externas e internas del material, las cuales dan lugar a las diferentes etapas y constituyen los parámetros que gobiernan al sistema.

2.3.1 Condiciones externas

Las condiciones externas gobiernan al proceso durante las primeras etapas del secado, cuando el agua libre es eliminada. Su efecto se hace notar en los coeficientes de transferencia de masa y calor, y repercuten directamente en la calidad del producto seco. Las variables externas son la temperatura, humedad, velocidad y dirección de flujo de aire, la forma física del sólido, la agitación convencional y el método de apoyo o soporte del sólido durante la operación de secado (Mujumdar, 1987).

Diversas investigaciones han explorado el efecto de cada una de las condiciones externas sobre la calidad y contenido nutrimental de la papa seca. Los mecanismos de transporte que ocurren en el interior del material dependen de estas condiciones en las primeras etapas de secado. En materiales con alto contenido de humedad como es el caso de la papa, el efecto de la contracción es notable desde el inicio del proceso, así como la evaporación excesiva en la superficie después de la remoción del agua libre, por lo que es necesario reducir o retardar la velocidad de evaporación mediante el suministro de humedades

relativas altas, mientras se mantiene la velocidad de transporte en el interior del material por el calor suministrado.

2.3.2 Condiciones internas

Las condiciones internas dependen de la naturaleza física del material, como lo es el tamaño y forma de la muestra, estructura y composición, temperatura interna y contenido de humedad. Las condiciones internas gobiernan en la última etapa de secado cuando ya se ha eliminado el agua libre del material. Las propiedades termodinámicas de la papa dependen de las condiciones internas y tienen una fuerte influencia en los mecanismos de transporte en el interior del material, principalmente en la fase higroscópica.

2.4 Mecanismos de transporte presentes durante el secado convectivo

Durante el secado convectivo, existe una transferencia simultánea de materia (humedad) y de energía (calor); en que la transferencia de calor dentro del alimento ocurre por conducción y la transferencia de masa toma lugar principalmente por difusión de acuerdo con los gradientes de temperatura y concentración de humedad respectivamente (Srikiatden and Roberts, 2008).

2.4.1 Mecanismos de transporte de masa

Se dice que existe transferencia de masa o materia cuando uno o más componentes de una mezcla se transportan de una zona de alta concentración a otra donde la concentración es menor. La diferencia de concentración es la que

constituye la fuerza motriz de la transferencia de masa. La velocidad de transferencia de un proceso es una competencia entre la fuerza impulsora que hace que se dé el transporte y la resistencia que es ejercida para evitar dicho transporte. En un medio poroso, los mecanismos de transporte pueden ser varios,, pues la transferencia de masa existe en la fase líquida y en la fase gaseosa. Entre estos mecanismos de transporte encontramos:

1. Difusión del líquido, si el sólido húmedo está a una temperatura por debajo del punto de ebullición del líquido o a temperaturas moderadas.
2. Difusión de vapor, si el líquido se vaporiza dentro del material
3. Difusión de Knudsen, si el secado se lleva a cabo a temperaturas y presiones muy bajas, por ejemplo, en el secado por congelación
4. Difusión de la superficie (es posible aunque no ha sido probado)
5. Las diferencias de presión hidrostática, cuando las tasas de evaporación internos exceden la tasa de transporte de vapor a través del sólido al entorno (altas temperaturas).
6. Capilaridad. Si el número de capilares con varios radios forman canales interconectados entonces se crea una diferencia en presión capilar la cual da como resultado una redistribución de la humedad de los capilares grandes a los pequeños por succión capilar.
7. Las combinaciones de los anteriores mecanismos

De estos mecanismos, las más importantes son la difusión y la capilaridad; la difusión molecular (o el transporte molecular) puede definirse como la transferencia (o el movimiento) de moléculas individuales a través de un fluido por medio de los movimientos individuales y desordenados de las moléculas. La cual se lleva a cabo mediante un gradiente de concentración que impulsa al movimiento de moléculas entre los componentes. La difusividad D_{AB} de un

componente A en un componente B, es una medida de la movilidad de difusión y, está definida por la relación J_{AZ} y su gradiente de concentración, es decir la primera Ley de Fick que rige este comportamiento y se expresa:

$$J_{AZ} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz}$$

Donde J_{AZ} es el flujo molar del componente A en la dirección z causado por la difusión molecular, en mol·kg de A/s·m², D_{AB} es la difusividad molecular de la molécula A en B en m²/s, C_A es la concentración de A en mol kg/m³ y z es la distancia de difusión en m.

Por otro lado, la capilaridad se da debido a la diferencia de atracciones relativas de moléculas entre líquido-líquido y aquellas moléculas líquido-sólido. En un sólido poroso, el líquido es atraído o sujetado con más fuerza cuando hay menos líquido. Por el contrario, se mantiene menos fuertemente cuando hay más líquido. Debido a las diferencias en la atracción capilar, el flujo de líquido se puede producir a partir de lugares en el sólido que tiene más agua a los lugares que tienen menos agua; es decir, de mayor concentración a menor concentración de agua. Esto se conoce como flujo insaturado y es extremadamente importante en el secado de un material con la humedad líquida. La expresión de difusión capilar es la misma que el de la expresión de difusión de Fick. Sin embargo, a veces es difícil distinguir la contribución de una difusión individual en particular.

En la práctica, la difusividad generalmente incluye efectos de todos los posibles mecanismos de transporte de la humedad, tanto en forma líquida y vapor. Al igual que Fourier y las leyes de Fick, la ley de Darcy es una relación empírica. Se describe el movimiento de fluido en un material poroso.

$$Q = \frac{k}{\mu}(P_l - P_g)$$

En donde Q es gasto, descarga o caudal en m³/s, k una constante actualmente conocida como coeficiente de permeabilidad de Darcy, variable en función del material de la muestra en m/s, μ es la viscosidad del líquido y P_l y P_g es la diferencia de presión. La permeabilidad k es la propiedad física más importante de un medio poroso de la misma manera que la porosidad es la propiedad geométrica más importante. Se mide cuantitativamente la capacidad de un medio poroso para llevar a cabo el flujo de fluido y se relaciona con la conectividad de los espacios vacíos y para el tamaño de grano de sólidos.

2.4.2 Transferencia de energía

Durante el proceso de secado se ven involucrados principalmente dos mecanismos de transferencia de energía (calor) los cuales son la conducción, la cual se da en el interior del material y la convección en la interfase sólido-aire.

2.4.2.1 Conducción de calor

La transferencia de calor por conducción se expresa con la ley de Fourier para la conducción de calor en fluidos y sólidos. La ley de Fourier para la conducción de calor se expresa:

$$\frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx}$$

Donde q_x es la velocidad de transferencia de calor en la dirección x (W), A es el área de corte transversal normal a la dirección del flujo de calor (m²), K es la

conductividad térmica (W/m·K). La cantidad q_x/A representa el flux de calor (W/m²), mientras que dT/dx es el gradiente de temperatura en la dirección x.

Esta ecuación es aplicable para el estado estacionario, lo cual implica que no hay cambio en las condiciones de un sistema con el tiempo; mientras que el estado transitorio implica cambios con el tiempo o dependencia respecto a este. En el estado transitorio se considera que las condiciones cambian en diversos puntos con respecto a un periodo de tiempo, en tanto que el estado estacionario se supone condiciones constantes en un punto e instante de tiempo determinado, la ley de Fourier entonces se transforma en la siguiente ecuación, sin generación de calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Donde las ecuaciones relacionan la temperatura T con la posición x,y,z y el tiempo t. Es importante considerar las variables conductividad y difusividad que intervienen en las ecuaciones.

2.4.2.2 Convección de calor

Existe convección de calor en fluidos cuando el calor se transmite por mezclas de las partes de mayor temperatura con las de menor en un mismo material, es decir, por movimiento de porciones macroscópicas de materia. Durante la convección se forman remolinos por los cambios de densidad producidos por la temperatura del aire y la superficie del sólido. La transferencia de calor por convección está determinada por la Ley de enfriamiento de Newton que indica:

$$q = h_c A (T_\infty - T_i)$$

Donde h_c es el coeficiente individual de transferencia de calor por convección a través del fluido, A es el área de transmisión de calor perpendicular a la dirección del flujo, T_∞ la temperatura del medio circundante y T_i la temperatura de la interfase. Cuando un fluido a una temperatura hace contacto con un sólido de una temperatura diferente, se forma una capa límite térmica en el líquido. La capa límite se desarrolla debido a una diferencia en las temperaturas, las partículas del fluido que hacen contacto con la placa alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura de la superficie de la placa.

A su vez estas partículas intercambian energía con las de la capa adyacente del fluido, y se producen en el fluido gradientes de temperatura, la región del fluido en la que existen estos gradientes de energía es la capa límite térmica. Al aumentar la distancia desde el inicio de la placa, los efectos de transferencia de calor penetran más en el flujo libre y crece la capa límite térmica. En la superficie no hay movimiento de fluido y la transferencia ocurre sólo por conducción. Por ello, las condiciones en la capa límite térmica que influyen en el gradiente de temperatura de la superficie determinan la transferencia de calor en la misma, y el h_c disminuirá a medida que la distancia "x" aumente, esta capa sólo existe cuando hay diferencias entre las temperaturas del sólido y el fluido.

2.5 Actividad de agua

La descomposición de los alimentos por microorganismos puede llevarse a cabo de forma rápida, mientras que las reacciones enzimáticas y químicas tienen lugar más lentamente durante el almacenamiento. En cualquiera de los casos, el agua es el factor más importante que controla la velocidad de deterioro; el

conocimiento del contenido de humedad por sí solo no es suficiente para predecir la estabilidad de los alimentos. Algunos alimentos son inestables a bajo contenido de humedad, mientras que otros son estables a contenidos relativamente altos de humedad. Esta disponibilidad de agua para llevar a cabo reacciones químicas, microbianas y enzimáticas que determina la vida útil de un alimento, se mide por la actividad de agua A_w .

El agua en los alimentos ejerce una presión de vapor y el grado de la presión de vapor depende de la cantidad de agua presente, la temperatura y la concentración de solutos disueltos (particularmente sales y azúcares) en el agua. La actividad de agua se define como la relación entre la presión de vapor del aire alrededor de un alimento y la presión de vapor del agua pura, permaneciendo a una misma temperatura. La A_w está relacionada con el contenido de humedad por la ecuación de Brunauer-Emmett-Teller (BET):

$$\frac{A_w}{M(1 - A_w)} = \frac{1}{M_1 C} + \frac{C - 1}{M_1 C} A_w$$

Donde A_w es la actividad de agua, M la humedad como porcentaje en peso seco, M_1 la humedad (en base seca) de la monocapa y C una constante.

Una proporción del total de agua en un alimento se une fuertemente a los sitios específicos (por ejemplo, grupos hidroxilo de los polisacáridos, carbonilo y amino de proteínas, la unión de hidrógeno). Cuando todos los sitios son ocupados por agua absorbida el contenido de humedad se denomina el valor monocapa BET. Por consiguiente, el valor de la monocapa de BET representa el contenido de humedad en el que el alimento es más estable. A contenidos de humedad por debajo de este nivel, hay una mayor tasa de oxidación de los lípidos y, a mayores

contenidos de humedad, el pardeamiento de Maillard y, a continuación actividades enzimáticas y microbiológicas se promueven.

El movimiento de vapor de agua de un alimento hacia el aire circundante depende tanto del contenido de humedad, su composición, la temperatura y la humedad del aire. A una temperatura constante el contenido de humedad de los alimentos cambia hasta que entra en equilibrio con el vapor de agua en el aire circundante.

El alimento, entonces ni gana ni pierde peso en el almacenamiento en esas condiciones. Esto se conoce como el contenido de humedad de equilibrio, y la humedad relativa de la atmósfera de almacenamiento se conoce como la humedad relativa de equilibrio. Cuando se representan diferentes valores de humedad relativa contra el contenido de humedad de equilibrio, se obtiene una curva conocida como isoterma de sorción de agua (Jangam et al., 2010).

Por tanto la A_w no debe confundirse con el contenido de humedad, ya que éste sólo nos da una medida cuantitativa del agua en una muestra sobre base seca o húmeda y es una propiedad extensiva que depende de la cantidad de materia; mientras que la A_w es una medida cualitativa que mide el estado del agua en un sistema, ya que es una cualidad interna que no depende de la cantidad de material y algunas de las ventajas de esta medida son: que proporciona información detallada del desarrollo de microorganismos, migración de humedad, estabilidad química y bioquímica, propiedades físicas (como la textura) y la vida útil de un alimento.

2.6 La papa como material de estudio

Para desarrollar un modelo matemático es necesario conocer la naturaleza del material de estudio, ya que la transferencia de masa y energía involucra diferentes mecanismos de transporte, los cuales dependen de las fases del sistema. Además, de la naturaleza del material dependerán las consideraciones y delimitaciones propias para el desarrollo del modelo.

La papa es considerada un material poroso. Un medio poroso se define como un sólido que tiene espacios vacíos (llamados poros) que son llenados con un fluido (gas o líquido) (Datta, 2007). Los poros generalmente se encuentran interconectados, por lo que el transporte de masa y calor es posible a través de ellos, siendo este tipo de transporte más rápido que el transporte a través de la matriz sólida.

Los medios porosos en sistemas alimentarios cubren diferentes escalas. Para el modelado de procesos de transporte en sistemas alimentarios, podemos dividir a los medios porosos en dos grupos: Un primer grupo de medios con poros grandes, en los cuales el fluido fluye en su mayoría fuera del sólido, por ejemplo en la refrigeración de productos a granel apilados. En este grupo, el transporte del fluido a través de los poros es tratado en términos de las ecuaciones de Navier-Stokes. El segundo grupo lo forman los medios con poros pequeños, en los que el transporte se lleva a cabo al interior del sólido, tal como sucede en el secado de alimentos. En este grupo, el transporte del fluido a través de los poros del sólido es abordado principalmente en términos de la Ley de Darcy (Datta, 2007).

Dentro de la teoría de medios porosos, los materiales capilar-porosos pueden definirse como aquellos que tienen una estructura de poros claramente reconocible, con un diámetro de poro menor a 10^{-7} m. La papa es un cuerpo capilar-poroso (Datta, 2007). Debido a que el diámetro de poro de los materiales capilar-porosos es muy pequeño, las fuerzas gravitacionales pueden despreciarse. Sin embargo, cuando el diámetro de poro es mayor a 10^{-7} m, las fuerzas gravitacionales deben ser tomadas en cuenta.

Los poros de la papa se encuentran saturados de agua ligada y agua libre que es evacuada conforme avanza el proceso de secado, comportándose como un material higroscópico y originando el encogimiento del material. En un material higroscópico existe un nivel de humedad de saturación, por debajo del cual, la presión de vapor en el interior está en función del nivel de humedad y de la temperatura. Por encima de este punto, la presión de vapor es función exclusiva de la temperatura e independiente del contenido de humedad, entonces el material se comporta como no higroscópico, es decir, el poro está lleno de agua en estado saturado o lleno de aire si el material está completamente seco (Datta, 2007).

2.6.1 El medio poroso como medio continuo

El modelado de procesos de transporte en medios porosos es conceptualmente diferente al basado en el medio continuo, sin embargo, un medio poroso puede ser estudiado mediante la superposición de dos (o más) medios continuos, por ejemplo, un esqueleto sólido y un fluido.

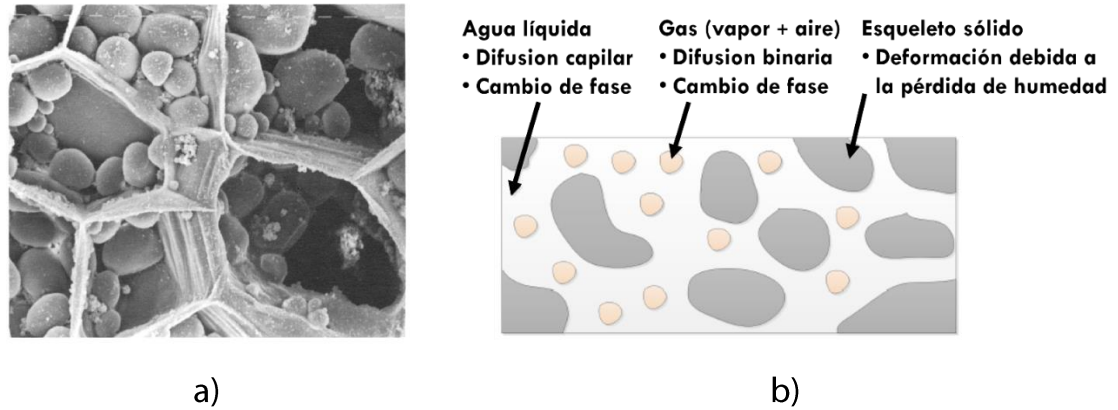


Figura 2. a) Imagen de la estructura interna de una papa, donde se observan los poros y el esqueleto sólido formado por gránulos de almidón y paredes celulares y b) su interpretación.

La papa, como medio poroso, consiste en una fase de sólido rígido continuo, la cual tiene agua libre, y agua ligada como película adherente; ambas forman la fase líquida. Al mismo tiempo existe una fase continua de gas supuesta como una mezcla ideal de vapor de agua y aire. Modelar un sistema tan complejo como la papa requiere de un enfoque que pueda promediar las propiedades del medio de estudio.

Podemos considerar a la papa como un sistema continuo, ya que todo el espacio que lo ocupa está constituido por materia. En los sistemas continuos se toma como referencia un elemento de volumen representativo (EVR), para el cual se calculan y son válidas cada una de las propiedades que definen al sistema. Su uso permite aplicar las leyes y principios de la mecánica de fluidos en una pequeña porción, la cual es representativa de todo el material.

El EVR comprende los volúmenes individuales de las fases presentes, las cuales pueden variar en función del tiempo y el espacio. El EVR debe ser lo suficientemente grande para que las cantidades promedio sean definidas, y lo

suficientemente pequeño para evitar variaciones importantes (Tsotsas y Mujundar, 2007). El EVR considera la continuidad de las fases presentes en la papa, a las cuales se aplican las leyes de transferencia de masa y calor que describen los fenómenos a estudiar.

2.6.2 Principios fundamentales de la mecánica del medio continuo

La mecánica de medios continuos se asienta en una serie de postulados o principios fundamentales que se suponen válidos siempre, independientemente del tipo de material y rango de desplazamientos o de deformaciones. Entre estos se encuentran los denominados postulados de conservación-balance que son:

- Conservación de la masa.
- Balance del momento cinético (o cantidad de movimiento).
- Balance del momento angular (o momento de la cantidad de movimiento).
- Balance de la energía (o primer principio de la termodinámica).
- Desigualdad de entropía.

Es necesario indicar que la desigualdad de entropía es más bien una restricción, ya que no puede ser entendida rigurosamente como un postulado de conservación-balance, puesto que es introducida por el Segundo principio de la termodinámica (Oliver y Agelet de Saracibar, 2000). La Tabla 1 muestra los principios fundamentales de la mecánica del medio continuo y sus ecuaciones correspondientes.

Tabla 1. Principios fundamentales de la mecánica del medio continuo

Nombre del principio	Nombre de la ecuación	Ecuación
Principio de conservación de la masa	Ecuación de continuidad	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$
Principio de la conservación del momento lineal	Ecuación de movimiento	$\nabla \cdot \sigma + \rho \vec{b} = \rho \vec{v}$
Principio de la conservación del momento angular	Simetría del tensor de tensiones	$\sigma = \sigma^T$
Principio de la conservación de la energía	Ecuación de energía	$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma : d + (\rho r - \nabla \cdot q)$
Principio de la irreversibilidad	Desigualdad de entropía	$P_e + Q_e = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial t}$

2.7 Principios básicos de la mecánica de sólidos deformables

La mecánica de sólidos deformables estudia el comportamiento de los cuerpos sólidos deformables ante diferentes tipos de situaciones como la aplicación de cargas o efectos térmicos. Estos comportamientos, más complejos que el de los sólidos rígidos, se estudian en mecánica de sólidos deformables introduciendo los conceptos de deformación y de tensión mediante sus aplicaciones de deformación.

2.7.1 Deformación y encogimiento

Se entiende por encogimiento a una deformación estructural significativa en la forma y tamaño de la muestra que ocurre a lo largo de la transferencia simultánea de masa y calor (Mayor and Sereno, 2004), durante el secado de agroalimentos, cuando el agua es removida de la superficie del tejido, las paredes de los poros llenos de agua experimentan una presión que arrastra toda la matriz

hacia el centro. Este estrés de contracción resulta en cambios estructurales prominentes en la forma y tamaño (Yang et al., 2001). Este encogimiento sufrido los materiales durante el secado limita la transferencia de los flujos de masa y de calor debida a la reducción del área de intercambio. Durante el desarrollo de este trabajo, se hablará sobre deformación y encogimiento de forma indistinta.

2.7.2 Tipos de sólidos deformables

Los sólidos deformables difieren unos de otros en su ecuación constitutiva. Según sea la ecuación constitutiva que relaciona las magnitudes mecánicas y termodinámicas relevantes del sólido, se tiene la siguiente clasificación para el comportamiento de sólidos deformables:

2.7.2.1 Comportamiento elástico

Se da cuando un sólido se deforma adquiriendo mayor energía potencial elástica y, por tanto, aumentando su energía interna sin que se produzcan transformaciones termodinámicas irreversibles. La característica más importante del comportamiento elástico es que es reversible: si se suprimen las fuerzas que provocan la deformación el sólido vuelve al estado inicial de antes de aplicación de las cargas. Dentro del comportamiento elástico hay varios subtipos, como elástico lineal isótropo, elástico lineal no isótropo y no lineal.

2.7.2.2 Comportamiento plástico

Comportamiento en el que existe irreversibilidad; aunque se retiren las fuerzas bajo las cuales se produjeron deformaciones elásticas, el sólido no vuelve

exactamente al estado termodinámico y de deformación que tenía antes de la aplicación de las mismas. A su vez los subtipos son plástico puro, plástico con endurecimiento y plástico con ablandamiento.

2.7.2.3 Comportamiento viscoso

Se produce cuando la velocidad de deformación entra en la ecuación constitutiva, típicamente para deformar con mayor velocidad de deformación es necesario aplicar más tensión que para obtener la misma deformación con menor velocidad de deformación pero aplicada más tiempo. Aquí se pueden distinguir los siguientes modelos visco-elástico y visco-plástico.

En principio, un sólido de un material dado es susceptible de presentar varios de estos comportamientos según sea el rango de tensión y deformación que predomine. Uno u otro comportamiento dependerá de la forma concreta de la ecuación constitutiva que relaciona parámetros mecánicos importantes como la tensión, la deformación, la velocidad de deformación y la deformación plástica, junto con parámetros como las constantes elásticas, la viscosidad y parámetros termodinámicos como la temperatura o la entropía.

2.7.3 Elasticidad lineal

Un caso particular de sólido elástico se presenta cuando las tensiones y las deformaciones están relacionadas linealmente, mediante la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \sum C_{ij,kl} \varepsilon_{kl}$$

Cuando eso sucede se dice que el sólido es elástico lineal. La teoría de la elasticidad lineal es el estudio de sólidos elásticos lineales sometidos a pequeñas deformaciones de tal manera que además, los desplazamientos y deformaciones sean "lineales", es decir, que las componentes del campo de desplazamientos u sean aproximadamente una combinación lineal de las componentes del tensor deformación del sólido. En general un sólido elástico lineal sometido a grandes desplazamientos no cumplirá esta condición. Por tanto la teoría de la elasticidad lineal solo es aplicable a:

- Sólidos elásticos lineales, en los que tensiones y deformaciones estén relacionadas linealmente.
- Deformaciones perceptibles en el tiempo.

2.7.4 Tensor de tensiones

La tensión en un punto se define como el límite de la fuerza aplicada sobre una pequeña región sobre un plano π que contenga al punto dividida del área de la región, es decir, la tensión es la fuerza aplicada por unidad de superficie y depende del punto elegido, del estado tensional de sólido y de la orientación del plano escogido para calcular el límite. Puede probarse que la normal al plano escogido n_π y la tensión t_π en un punto están relacionadas por:

$$t_\pi = \hat{T}(n_\pi)$$

Donde \hat{T} es el llamado tensor de tensión, también llamado tensor de tensiones, que fijada una base vectorial ortogonal viene representado por una matriz simétrica 3x3:

$$\dot{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Donde la primera matriz es la forma común de escribir el tensor tensión en física y la segunda forma usa las convenciones comunes en ingeniería. Dada una región en forma de ortoedro con caras paralelas a los ejes coordenados situado en el interior un sólido elástico tensionado las componentes σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} dan cuenta de cambios de longitud en las tres direcciones, pero que no distorsinan los ángulos del ortoedro, mientras que las componentes σ_{xy} , σ_{yz} y σ_{zx} están relacionadas con la distorsión angular que convertiría el ortoedro en un paralelepípedo.

En teoría lineal de la elasticidad dada la pequeñez de las deformaciones es una condición necesaria para poder asegurar que existe una relación lineal entre los desplazamientos y la deformación. Bajo esas condiciones la deformación puede representarse adecuadamente mediante el tensor deformación infinitesimal o tensor de pequeñas deformaciones que viene dada por:

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Los componentes de la diagonal principal contienen los alargamientos (dilataciones), mientras que el resto de los componentes del tensor son los medios desplazamientos. Las componentes están linealmente relacionadas con los desplazamientos mediante esta relación:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Donde u representa el desplazamiento en la dirección x (también será posible expresar los en v, y y w, z respectivamente).

2.7.5 Parámetros de Lamé

En elasticidad lineal, los parámetros de Lamé son dos constantes elásticas que caracterizan por completo el comportamiento elástico de un sólido isótropo para pequeñas deformaciones, estos dos parámetros se designan como: λ , también conocido como primer parámetro de Lamé, el cual no tiene una interpretación física directa o simple, pero sirve para simplificar la matriz de rigidez en la ley de Hooke.

μ , conocido como módulo de elasticidad transversal o segundo parámetro del Lamé. También es denotado por la letra G .

Los dos parámetros juntos constituyen una parametrización del módulo de elasticidad para medios isótropos homogéneos, y están así relacionados con los otros módulos de elasticidad.

2.7.6 Módulos elásticos en función de los parámetros de Lamé

2.7.6.1 Módulo de Young

$$E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

2.7.6.2 Módulo de rigidez

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \mu$$

2.7.6.3 Módulo de Poisson

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

2.7.7 Ecuaciones constitutivas de Lamé-Hooke

Las ecuaciones de Lamé-Hooke son las ecuaciones constitutivas de un sólido elástico lineal, homogéneo e isótropo, tienen la forma:

$$\sigma_{ij} = \sum C_{ij,kl} \varepsilon_{kl}$$

En el caso de un problema unidimensional, $\sigma_{ij} = \sigma_{11}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11}$ y $C_{11} = E$, por lo cual la ecuación se reduciría a $\sigma = E \cdot \varepsilon$, donde E es el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young y G (que está involucrado en ε) es el módulo de elasticidad transversal. Para caracterizar el comportamiento de un sólido elástico lineal e isótropo se requieren además del módulo de Young otra constante elástica, llamada coeficiente de Poisson (ν) y el coeficiente de temperatura (α). Por otro lado, las ecuaciones de Lamé para un sólido elástico lineal e isótropo pueden ser deducidas del teorema de Rivlin-Ericksen, que pueden escribirse en la forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha \Delta T] \quad \varepsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \alpha\Delta T] \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha\Delta T] \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}$$

Ciertos materiales muestran un comportamiento solo aproximadamente elástico, mostrando por ejemplo variación de la deformación con el tiempo o fluencia lenta. Estas deformaciones pueden ser permanentes o tras eliminar las cargas de las tensiones del cuerpo pueden desaparecer (parcial o completamente) con el tiempo (viscoplasticidad, viscoelasticidad).

Además algunos materiales pueden presentar plasticidad es decir pueden llegar a exhibir pequeñas deformaciones permanentes, por lo que las ecuaciones anteriores en muchos casos tampoco constituyen una buena aproximación al comportamiento de estos materiales.

La Ley de Hook que relaciona las tensiones en función de las deformaciones en función de los módulos elásticos está dada por el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Invertiendo la matriz, podemos encontrar la relación de las deformaciones en función de los esfuerzos, la cual quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{G} & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & \frac{1}{G} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

2.7.8 Ecuaciones de equilibrio interno

Cuando las deformaciones no varían con el tiempo, el campo de tensiones dado por el tensor tensión representa un estado de equilibrio con las fuerzas de volumen $b = (b_x, b_y, b_z)$ en todo punto del sólido, lo cual implica que el campo de tensiones satisface estas condiciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0$$

Las ecuaciones de equilibrio interno en función de los módulos de Young (E), rigidez (G) y Poisson (ν) son:

$$X = \frac{E}{1 - \nu(1 + 2\nu)} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\nu + G) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} \right) \right]$$

$$Y = \frac{E}{1 - \nu(1 + 2\nu)} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\nu + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} \right) \right]$$

$$Z = \frac{E}{1 - \nu(1 + 2\nu)} \left[(1 - \nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + G \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + (\nu + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \right]$$

Donde u, v y ω son los desplazamientos en los ejes x, y y z respectivamente.

2.7.9. Equilibrio en el contorno

Además de las últimas ecuaciones deben cumplirse las condiciones de contorno, sobre la superficie del sólido, que relacionan el vector normal a la misma $n = (n_x, n_y, n_z)$ (dirigido hacia el exterior) con las fuerzas por unidad de superficie que actúan en el mismo punto de la superficie $f = (f_x, f_y, f_z)$:

$$\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = f_x$$

$$\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = f_y$$

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z = f_z$$

2.7.10 Principio de la teoría poroelástica

La teoría poroelástica o poroelasticidad estudia el comportamiento de los materiales elásticos cuyos poros están ocupados por un fluido. Se basa en las ecuaciones para materiales elásticos lineales de la mecánica de sólidos deformables. Biot desarrolló la teoría poroelástica considerando las suposiciones siguientes:

- El material de estudio es isótropo.
- Existe reversibilidad de las relaciones esfuerzo-deformación.

- La relación entre esfuerzo y deformación es lineal (material elástico lineal).
- Las deformaciones sufridas son perceptibles en el tiempo.
- El fluido en los poros es incompresible.
- El fluido puede contener burbujas de aire.
- El fluido líquido fluye por los poros de acuerdo a la ley de Darcy.

Debido a la deformación perceptible que se supone para el material, es razonable pensar en una relación lineal y reversible entre el esfuerzo y la deformación.

2.7.10.1 Energía de deformación para materiales porosos

Para poder definir a la energía de deformación en materiales porosos, se deben definir a los esfuerzos y los desplazamientos resultantes. La teoría poroelástica involucra las ecuaciones anteriormente descritas (elasticidad lineal) pero en dos fases: el sólido y el fluido. u, v y w se refieren a los desplazamientos del sólido. Para definir a los esfuerzos, Biot dedujo que el esfuerzo total (σ_{total}) se componía de dos partes; el esfuerzo provocado por el sólido (σ) y por el fluido σ_{fluido} . De esta manera:

$$\sigma_{total} = \sigma_{ij} + \sigma_{fluido} \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j; \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker; se usa este operador porque el fluido no provoca cambios en los esfuerzos cortantes (es decir, cuando $i \neq j$), ya que la presión tiene como característica ser siempre normal a la superficie.

Por otro lado, la porosidad (ϕ) se define como el cociente entre el volumen de poros y el volumen del sólido. La porosidad también puede obtenerse en función de las áreas: tomando en cuenta una sección transversal del material, la porosidad se define como el área ocupada por poros entre el área ocupada por el esqueleto sólido del material. De esta forma, el esfuerzo del fluido se define:

$$\sigma_{fluido} = \phi p$$

Donde p es la presión del fluido. Por lo tanto, el esfuerzo total en el material queda definido por:

$$\sigma_{total} = \sigma_{ij} + \phi p$$

CAPÍTULO 3

MATERIALES Y

MÉTODOS

CAPÍTULO 3 MATERIALES Y MÉTODOS

El modelo matemático desarrollado se validó experimentalmente para determinar la precisión del mismo, para lo cual se realizaron corridas experimentales de secado de muestras de papa a condiciones de operación específicas.

3.1 Materiales

La variedad de papa utilizada para los experimentos fue Alpha (*Solanum tuberosum*) blanca, ya que por su tamaño es posible obtener geometrías completas. Además, está disponible para su adquisición durante todo el año.

3.1.1 Selección del material

Una de las principales características a considerar para la obtención de la papa es su madurez. La adquisición de la papa debe ser lo más fresca posible, ya que en estas condiciones, tiene el mayor contenido de humedad. Las papas se adquirieron con el mismo proveedor para evitar variaciones en el contenido de humedad ocasionadas por el tipo de suelo y las condiciones de crecimiento.

Las papas se almacenaron a 4°C aproximadamente, en un lapso no mayor a 72 horas desde su adquisición hasta su utilización. Bajo estas condiciones, se garantizó que el contenido de humedad del material fresco prevaleciera, evitando la degradación del producto.

3.1.2 Preparación de las muestras

Las papas se lavaron con agua y jabón y se eliminó el exceso de humedad mediante su exposición al ambiente. La cáscara fue eliminada con un pelador manual. En un estudio previo se realizaron pruebas preliminares a diferentes geometrías, tales como rodajas, cubos y cilindros de diversos tamaños. En dichas pruebas se observó que los cilindros presentaron una deformación más perceptible y uniforme ante las otras geometrías, además, se descartó utilizar rodajas en los experimentos debido a que alturas pequeñas suelen ser despreciables. El tamaño del cilindro ofrecerá además las siguientes ventajas:

1. La proporción del área superficial de contacto con el medio en comparación con el espesor de la muestra, permite que los mecanismos de transporte se lleven a cabo a través del área superficial.
2. El flux de masa es favorecido al aumentar el área superficial en contacto, lo que favorece la rapidez de secado y disminuye los tiempos del proceso.
3. El espesor del material es lo suficientemente grande para permitir la incrustación de los termopares en el interior de la muestra, de tal manera que se encuentren alejados de la superficie y de la cara inferior, y evitar que el efecto de la contracción no altere la determinación térmica.

Debido a estas consideraciones, se determinó utilizar una geometría cilíndrica para el desarrollo de los experimentos. Se obtuvieron cilindros de 5.4 cm de diámetro y 1.5 cm de altura, utilizando un cortador cilíndrico especial.

Los cilindros recién cortados se pesaron inmediatamente en una balanza electrónica marca Sartorius modelo ED 42025-CW con una capacidad de 4200 g y

sensibilidad de 0.01 g, para obtener el peso exacto de las muestras a secar. Las muestras se sometieron a un tratamiento de escaldado a 70°C durante 1 minuto (Leeratanarak, et al., 2006), para inhibir el oscurecimiento ocasionado por reacciones enzimáticas, tales como las producidas por la peroxidasa. Además, cuando un alimento es sometido a un pretratamiento como el escaldado en agua caliente, se garantiza la inactivación de enzimas, se acorta el tiempo de secado y se aumentan las etapas de secado (Doymaz, 2008). El escaldado también origina el ablandamiento del material, lo que facilita la eliminación de humedad (Seenadeera et al., 2005).

3.2 Metodología

El diseño experimental para la validación del modelo fue un diseño *one-way* (de un solo factor), el cual fue la temperatura. El número de niveles fue de 3 (40, 50 y 60°C). La velocidad del aire se mantuvo constante a 1.5 m/s, al igual que la humedad relativa a un 25%. Cada experimento se realizó por duplicado, por cual, se realizaron un total de seis corridas experimentales.

Las variables respuesta de los experimentos fueron los perfiles de humedad y temperatura. Las corridas experimentales se aleatorizaron debido a que los factores no controlables pueden influir en los resultados de las mismas. Aleatorizar los experimentos previene la introducción de sesgos en los datos obtenidos y la dependencia de las observaciones, además, es necesario para el análisis estadístico de los datos obtenidos.

Tabla 2. Tratamientos y repeticiones de los experimentos.

Tratamientos	Niveles del factor Temperatura
1	T ₁ (40°C)
2	T ₂ (52°C)
3	T ₃ (60°C)
Repeticiones	2
Tratamientos	3
Total de experimentos	6

Los experimentos se realizaron en un secador tipo túnel con flujo longitudinal del Laboratorio de Tecnología Agroalimentaria del CIIDIR Oaxaca. El aire en el túnel es calentado mediante resistencias eléctricas, manteniéndose a una temperatura constante mediante un controlador PID (Proporcional Integral Diferencial). La velocidad de flujo de aire del secador utilizada para los experimentos fue de 1.5 m/s.

La humidificación del aire se realizó de manera manual mediante dispersor de vapor introducido en el ducto inferior del túnel. El vapor fue suministrado al túnel a través de un generador de vapor marca Anghinetti SRL, modelo TV/G2F con capacidad para 5 litros. El generador de vapor fue alimentado con agua purificada, para minimizar las incrustaciones de sales. El túnel de secado cuenta con un soporte sostenido por tensión a una celda de carga con repetibilidad de 0.1 g, la cual está conectada por un puerto serial a una computadora. Este dispositivo de medición de peso se conecta a un sistema de adquisición de datos para registrar los valores correspondientes de variación de peso. Sin embargo, también se registraron los valores de una muestra testigo.

La medición de humedad y temperatura se efectuó por medio de un sensor de humedad HUMICAP HMP234 marca VAISALA (2% error, previamente calibrado

con sales, ASTM E104-85) que mide la temperatura del bulbo húmedo. Este instrumento se conectó a un equipo de adquisición de datos que recibe señales de milivoltaje de los termopares y celda de carga en tiempo real para transmitir las señales en forma digital a la computadora.

La temperatura, humedad relativa y velocidades del aire se midieron en tiempo real empleando un sistema de adquisición FieldPoint®. Sin embargo, la humedad relativa y temperatura se verificaron con ayuda de un termohigrómetro marca BK Precision Modelo RS-232.

El control de las condiciones variables en el túnel se realizó mediante un controlador automático programable marca National Instrument® FP-1000, el cual permite la incorporación de un sistema de entrada de datos y salida de control de procesos en tiempos reales.

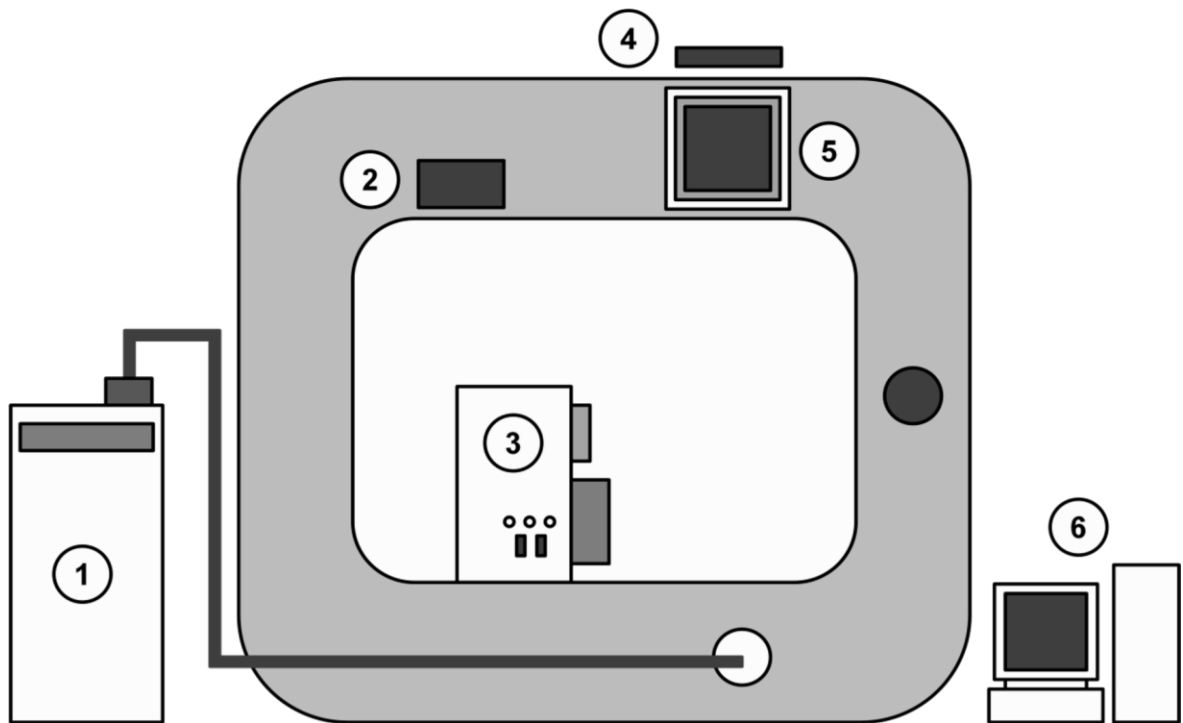


Figura 3. Diagrama del túnel de secado: 1) Generador de vapor. 2) Termohigrómetro. 3) Controladores. 4) Balanza. 5) Celda de carga. 6) Computadora.

Los datos del set point fueron establecidos mediante el programa Measurement & Automation®, y los datos fueron recolectados directamente en una hoja de escritura Word, por medio de un sistema de adquisición LabVIEW® National Instrument. Las temperaturas en el interior y en la superficie de la muestra se midieron con termopares Vaisala Veriteq cuyos datos son directamente enviados a una hoja de datos con ayuda del software propio de Vaisala. La Figura 3 muestra un diagrama con la ubicación de los componentes principales del túnel de secado.

Las muestras se acomodaron sobre dos charolas de carga del túnel de secado, a las cuales se les colocó una malla de plástico perforada que impidió el contacto directo del material con el metal de las charolas, evitando la transferencia de calor por conducción del metal de la charola hacia la cara inferior del material.

3.3 Determinación del contenido de humedad inicial

El contenido de humedad se define como la cantidad de agua presente en una muestra de material, expresado en función del peso de la muestra seca. La determinación del contenido de humedad se efectuó en cada una de las pruebas experimentales. Para ello se cortaron ocho trozos de papa fresca correspondientes al mismo lote que las papas utilizadas para los experimentos. Las muestras se colocaron sobre un vidrio de reloj y se pesaron inmediatamente en una balanza electrónica para la obtención de su peso exacto.

La determinación del contenido de humedad se efectuó mediante el método de la estufa, el cual es un método normalizado por ISO 3130 y NOM-211-SSA1-2003. Se utilizó una estufa marca Shel Lab modelo 1430D con capacidad de

127 lbs y 1.7 m³, para un rango de 5-260°C ± 1°C. Las muestras se introdujeron a la estufa durante 24 horas a 105°C (AOAC, 1980). Se obtuvieron los pesos finales y se determinó el contenido de humedad inicial (W_i) por medio de la expresión:

$$W_i = \frac{\text{Peso húmedo} - \text{Peso seco}}{\text{Peso seco}}$$

3.4 Determinación del contenido de humedad en el equilibrio

Durante el proceso de secado se requiere conocer el contenido de humedad en el equilibrio a partir de los datos experimentales. Para ello se calculó el contenido de humedad inicial y el peso anhidro. Con el peso seco anhidro calculado (PSC) y los pesos de la muestra obtenidos a diferentes intervalos de tiempo durante el proceso de secado fue posible calcular el contenido de humedad actual de la muestra. El peso seco calculado de la muestra (PSC) se obtuvo mediante una ecuación que relaciona el peso de la muestra, el tiempo en el que el peso del material se puede apreciar constante (p) y el contenido de humedad inicial promedio (W), estableciendo:

$$PSC = \frac{p}{100 + W} \times 100$$

El contenido de humedad actual de la muestra (W_{actual}), se obtuvo con el peso corriente (p) y el peso seco calculado (PSC):

$$W_{actual} = \frac{p - PSC}{PSC} \times 100$$

El contenido de humedad en el equilibrio se determinó a partir de las isotermas de sorción (Chen, 2007) según las condiciones del proceso, por ejemplo, a 60°C y 25% de humedad relativa, las isotermas de sorción indican que el contenido de humedad en el equilibrio es de 0.03.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO DEL

MODELO

CAPÍTULO 4 DESARROLLO DEL MODELO

Los modelos son abstracciones de los sistemas y procesos reales que nos ayudan a comprenderlos mediante ecuaciones matemáticas (Rasmunson *et al.*, 2014). En un contexto de ingeniería, el modelado es un requisito previo para:

- a) Diseño, ampliación, optimización y control de procesos
- b) Comprensión de los mecanismos presentes
- c) Evaluación, planeación y diseño de experimentos
- d) Diagnóstico y solución de problemas
- e) Determinación de cantidades que no pueden ser medidas de manera directa
- f) Simulación en lugar de experimentos costosos
- g) Desarrollo de estudios de factibilidad para la determinación del potencial de un equipo, prototipo o proceso antes de construirlo o adquirirlo

Por tanto, debido a la naturaleza del medio y a estrategias de simplificación, el modelo desarrollado considera las siguientes suposiciones:

1. El material de estudio es isótropo.
2. Las tres fases son continuas.
3. La mezcla binaria de agua-aire sigue el comportamiento de un gas ideal.
4. El efecto de la gravedad es despreciable.
5. Existe un equilibrio termodinámico entre las tres fases, por lo que la presión de vapor es igual a su valor de equilibrio, y la temperatura de las fases es la misma.
6. El aire es insoluble en la fase líquida.
7. No se considera el efecto de la energía cinética, la disipación de líquido viscoso y el trabajo realizado por las fuerzas involucradas.

8. La relación entre esfuerzo y deformación es lineal (material elástico lineal).
10. Las deformaciones sufridas son pequeñas.
11. El agua en los poros es incompresible.
12. El agua líquida fluye por los poros de acuerdo a la ley de Darcy.

4.1 Geometría

El modelo fue desarrollado para ser validado con muestras cilíndricas de papa de 5.4 cm de diámetro y 1.5 cm de altura. Como estrategia de simplificación se utilizó una geometría 2D axisimétrica para reducir la robustez y agilizar la solución computacional del modelo. Se estableció un eje axisimétrico en el centro de la muestra cilíndrica, por lo que la geometría simplificada fue un cuadrilátero de 2.7 cm de base (correspondiente al radio del cilindro) y 1.5 cm de altura.

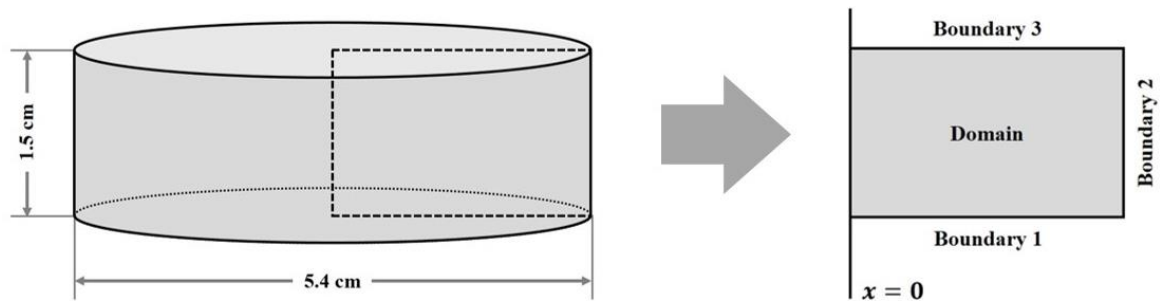


Figura 4. Esquema de la geometría utilizada en el modelo y su representación axisimétrica.

4.2 Estructura general

El modelo desarrollado se compone de cinco módulos:

- a) Dos módulos de ecuaciones diferenciales parciales en forma de coeficientes para las ecuaciones de conservación de humedad (agua líquida y vapor) y aire seco, respectivamente.
- b) Un módulo de transferencia de calor (energía) en medios porosos.
- c) Un módulo de flujo de fluidos que involucra la Ley de Darcy para el estudio de las tensiones que ejerce el transporte de agua líquida en el interior del material.
- d) Un módulo de mecánica estructural que incluye los conceptos de la poroelasticidad para describir la evolución de la deformación en el material.

La Figura 5 muestra un esquema de la estructura general del modelo y su acoplamiento.

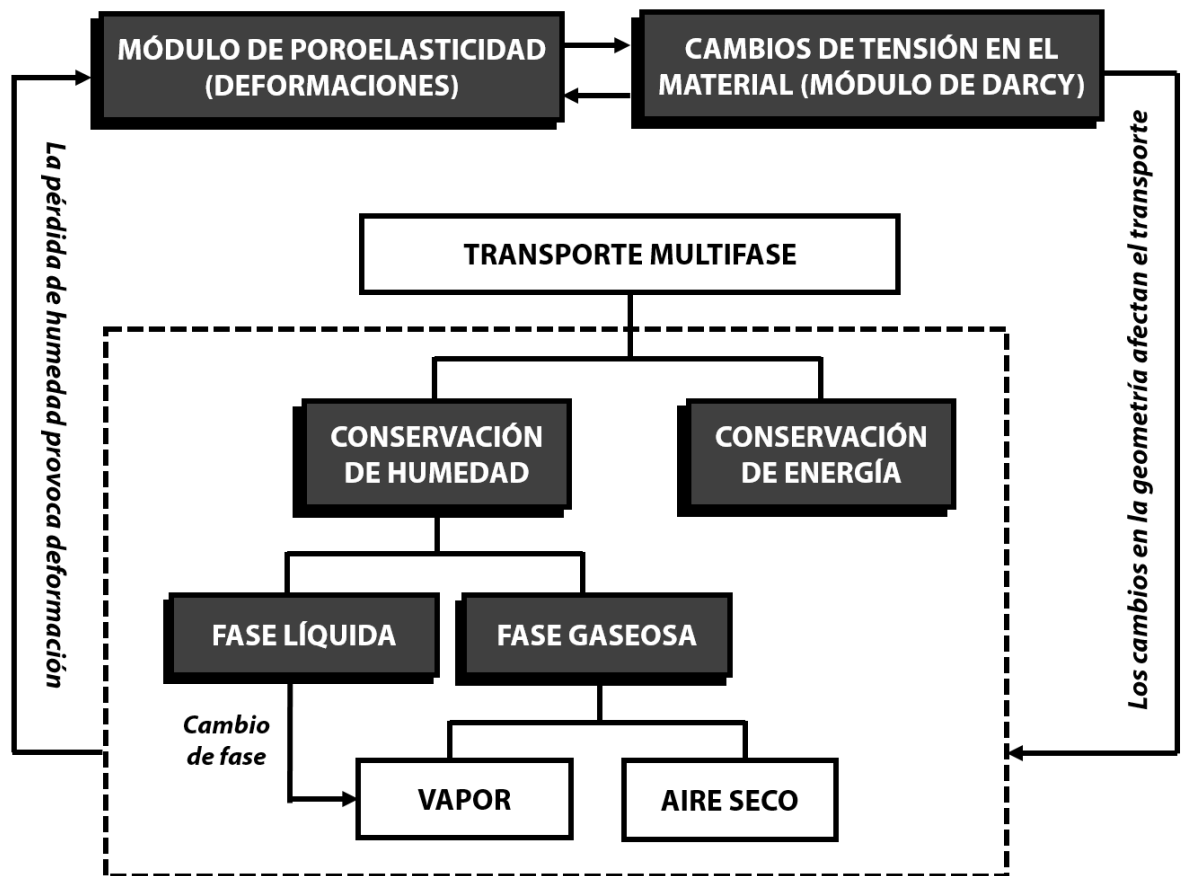


Figura 5. Estructura general del modelo y su acoplamiento.

4.3 Ecuaciones de conservación

Las ecuaciones de conservación corresponden a los balances generales en el dominio del material. Se desarrollaron tres ecuaciones de conservación, correspondientes a los balances de humedad, calor y aire seco.

4.3.1 Ecuación de conservación de humedad

La transferencia de masa durante el secado involucra diferentes mecanismos de transporte, los cuales dependen de la fase del sistema. El propósito del acoplamiento y solución de las ecuaciones de transferencia de masa es conocer los perfiles de pérdida de humedad en el material durante el proceso, por lo cual, la variable a resolver puede ser la concentración de agua en el material, o bien, el contenido de humedad, que se define como la magnitud que expresa la cantidad de agua en un material sólido y puede representarse en términos de una base de masa seca o de una base húmeda.

La ecuación 4.1 indica que la variación del contenido de humedad respecto al tiempo se debe a tres contribuciones principales: el flux de la fase líquida, el flux de la fase vapor y una contribución adicional originada por los cambios de tensión causados por la variación de la presión en el dominio del sistema.

La variable dependiente de la ecuación de conservación de humedad es el contenido de humedad en base seca (W) que representa la cantidad de agua (en fases líquida y vapor) presente en el dominio por unidad de materia seca.

$$\underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{\text{Elemento conservativo}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_s} \nabla \cdot (n_l)}_{\text{Contribución de la fase líquida}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_s} \nabla \cdot (n_v)}_{\text{Contribución de la fase vapor}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_s} \nabla \cdot (n_\sigma)}_{\text{Contribución de las tensiones ejercidas en el material}} = 0 \quad (4.1)$$

4.3.2 Ecuación de conservación de energía

La transferencia de energía durante el secado involucra diferentes mecanismos de transporte, tales como la convección, que se da en sistemas en los que no existe equilibrio termodinámico entre las fases presentes, o la radiación, principalmente en sistemas metálicos. Sin embargo, en el proceso de secado convectivo de alimentos, es la conducción el principal mecanismo que rige la transferencia de energía.

El propósito del acoplamiento y solución de las ecuaciones de transferencia de energía es conocer los perfiles de temperatura en el material durante el proceso, por lo cual, la variable a resolver es la temperatura.

En el dominio del material, la transferencia de calor es descrita por la Ley de Fourier, puesto que se lleva a cabo por conducción. Además, la variación de la energía interna se ve afectada por la contribución energética que aporta cada una de las fases ($i = \text{líquido, vapor, aire}$), así como por la energía necesaria para la evaporación del agua líquida en el interior del material, puesto que en el dominio el agua líquida puede cambiar de fase. La variable dependiente de la ecuación de conservación de calor es la temperatura (T) del sistema.

$$\underbrace{\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Elemento conservativo}} + \underbrace{\rho_i C_{p_i} n_i \cdot \nabla T}_{\text{Contribución energética que aporta cada fase}} - \underbrace{\nabla \cdot (k \nabla T)}_{\text{Conducción de calor}} + \underbrace{\lambda(n_v)}_{\text{Energía necesaria para el cambio de fase en el dominio}} = 0 \quad (4.2)$$

4.3.3 Ecuación de conservación de aire seco

A pesar de no ser parte del balance de humedad, el cálculo de la densidad del aire seco en el dominio es necesario para conocer la concentración y presión del vapor de agua al interior del material. La ecuación de conservación de aire seco tiene como variable dependiente la densidad del aire seco (ρ_a).

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_a}{\partial t}}_{\text{Elemento conservativo}} + \underbrace{\nabla \cdot (n_a)}_{\text{Contribución de la fase aire seco}} = 0 \quad (4.3)$$

4.4 Ecuaciones de flux

4.4.1 Flux de la fase líquida

La fase líquida está constituida únicamente por agua líquida. El líquido es considerado como un material incompresible, por lo cual, los efectos de la compresión son despreciados. En consecuencia, podemos considerar que la densidad del líquido permanece constante durante el proceso de secado. El mecanismo de transporte que rige la transferencia de masa en la fase líquida es el

flujo capilar y es explicado en términos de la Ley de Darcy. El flujo capilar es consecuencia de la diferencia de atracción entre las moléculas del líquido y las moléculas de la fase sólida, y se lleva a cabo de las regiones en donde existe mayor cantidad de agua hacia las que tienen menor cantidad, por lo que la presión interna es el gradiente que impulsa al movimiento capilar del agua líquida (Datta, 2007).

En otras palabras, la fuerza impulsora responsable del flujo capilar es la diferencia de presión dentro del sistema, lo cual puede expresarse matemáticamente por medio de la expresión:

$$n_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial P_l}{\partial s} \quad (4.4)$$

Donde n_l representa el flux másico del líquido; P_l es la presión del líquido; k_l es la permeabilidad del líquido; μ_l es la viscosidad del líquido y s es la distancia. En sistemas porosos, el movimiento capilar en el poro considera el agua libre y el espacio ocupado por la fase gaseosa en su interior. La presión del gas es mayor que la presión del líquido, lo que origina la formación de un menisco entre ambas fases, estableciendo una relación denominada presión capilar, representada por:

$$P_c = P_g - P_l \quad (4.5)$$

Por lo tanto, la ecuación 4.2 puede reescribirse como:

$$n_l = -\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial (P_g - P_c)}{\partial s} \quad (4.6)$$

O bien:

$$n_l = \underbrace{-\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial P_g}{\partial s}}_{\text{Flux másico debido a la presión del gas}} + \underbrace{\rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \frac{\partial P_c}{\partial s}}_{\text{Flux másico debido a la capilaridad}} \quad (4.6)$$

Donde n_l representa el flux másico del líquido por efecto de la presión y la capilaridad; P_g es la presión total del gas en la fase gaseosa; P_c es la presión capilar del líquido; k_l es la permeabilidad del líquido y μ_l es la viscosidad del líquido. Finalmente, involucrando el operador nabla, que representa la medición de la rapidez de variación de una magnitud física al desplazarse una cierta distancia, podemos expresar la ecuación 4.5 como:

$$n_l = \rho_l \frac{k_l}{\mu_l} \nabla(P_c - P_g) \quad (4.7)$$

Esta ecuación expresa el flux másico de la fase líquida en términos de la presión capilar. Los procesos para la determinación de presión capilar son complejos, sin embargo, el enfoque práctico y teórico que se utiliza es una relación empírica entre presión capilar y contenido de humedad. Esta relación asume que toda el agua líquida está presente en los capilares y que fluye siempre y cuando la presión del gas sea superior a la presión capilar. Cuando ambas son iguales, el líquido deja de fluir y la presión capilar se determina a partir de la presión del aire.

Sin embargo, los métodos usuales para medir la presión capilar no pueden ser aplicados a tejidos blandos como la papa, y requieren de modificaciones importantes debido a que son materiales no homogéneos y suelen deformarse a las altas presiones (Halder *et al.*, 2010).

Por lo tanto, los grados de libertad de la ecuación 4.6 no serían los suficientes para su solución, debido a que no tenemos acceso a datos de presión capilar en papa. Es por eso que será necesario reescribir la ecuación 4.6 en términos de un coeficiente que considere los fenómenos presentes en la fase líquida.

Además, debido a que la principal fuente de agua en un tejido es la célula, es importante considerar que el transporte de humedad en un tejido celular depende de su vía (intracelular o extracelular), que a su vez depende de la temperatura (Halder *et al.*, 2010).

El transporte de agua durante el secado de papa es principalmente intracelular a temperaturas menores de 52°C, debido a que las membranas celulares permanecen intactas. Por el contrario, durante el secado a temperaturas altas (mayores de 52°C), las membranas celulares se dañan de manera importante, por lo que la vía de transporte de humedad es principalmente extracelular, es decir, a través de los espacios intercelulares creados por las células muertas, con una resistencia mucho menor que el transporte de agua. Por lo tanto, las propiedades de transporte a bajas temperaturas no pueden ser utilizadas para altas temperaturas debido a que corresponden a diferentes vías de migración de la humedad (Halder *et al.*, 2010).

El transporte de humedad a bajas temperaturas, se puede describir en términos del agua que se mueve desde el interior de las células a través de las membranas celulares y después a través de las paredes celulares en el espacio intercelular. Este transporte de humedad se lleva a cabo debido al gradiente de potencial de agua entre las células y los espacios intercelulares. Las membranas celulares, paredes celulares y los espacios intercelulares ofrecen resistencia a la migración de humedad.

Considerando lo anterior, puede expresarse el flujo de agua desde el interior de la célula hacia el exterior. El potencial de agua o potencial hídrico ψ es la fuerza motriz para el transporte de agua, dentro y fuera de la célula y se expresa como:

$$\begin{aligned}\psi_{w,intra} &= \psi_{w,i} + R_g T \ln(a_{w,intra}) \\ \psi_{w,extra} &= \psi_{w,i} + R_g T \ln(a_{w,extra})\end{aligned}\tag{4.8}$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial hídrico que conduce el flujo de agua desde el interior de la célula hacia el exterior está dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_w &= [\psi_{w,0} + R_g T \ln(a_{w,intra})] - [\psi_{w,0} + R_g T \ln(a_{w,extra})] \\ \Delta\psi_w &= R_g T \ln(a_{w,intra}) - R_g T \ln(a_{w,extra}) \\ \Delta\psi_w &= R_g T [\ln(a_{w,intra}) - \ln(a_{w,extra})] \\ \Delta\psi_w &= R_g T \ln\left(\frac{a_{w,intra}}{a_{w,extra}}\right)\end{aligned}\tag{4.9}$$

Donde R_g es la constante de los gases ideales, T es la temperatura de secado y a_w es la actividad de agua intracelular y extracelular respectivamente. La relación de la actividad de agua y contenido de humedad a temperatura constante se conoce como isoterma de humedad y es propia para cada material. La diferencia de presión debida a la diferencia de potencial hídrico se puede expresar como:

$$\Delta p_w = \frac{R_g T}{V_w} \ln\left(\frac{a_{w,intra}}{a_{w,extra}}\right)\tag{4.10}$$

Donde V_w es el volumen de agua y p_w representa físicamente el efecto global de todas las fuerzas superficiales que actúan sobre el fluido, por lo tanto, es equivalente a la presión capilar (Gee *et al.*, 1992). Asumiendo un flujo de Darcy, el flux de agua a través del tejido se puede escribir como:

$$n_w = -\rho_w \frac{k_{eff} \Delta p_w}{\mu_w \Delta x} \quad (4.11)$$

Donde k_{eff} es la permeabilidad efectiva a través del tejido; es un parámetro concentrado que incluye el efecto del transporte a través de las paredes celulares, membranas celulares, y los espacios intercelulares. La ecuación 4.10 es análoga a la ecuación de flujo de agua $n_w = -\rho_w L_w \Delta p_w$, comúnmente utilizada en el campo de la fisiología vegetal. La relación entre la conductividad hidráulica L_w y la permeabilidad k_{eff} se puede escribir como:

$$L_w = \frac{k_{eff}}{\mu_w \Delta x} \quad (4.12)$$

En la literatura, existe solo una pequeña cantidad de datos de permeabilidad para el agua a través de diversos tejidos biológicos, las paredes celulares y las membranas celulares.

Las permeabilidades de tejidos de papa reportadas son del orden de 10^{-18} m² (Datta, 2006), estos datos representan la permeabilidad a través de la mayoría de los poros en el espacio intercelular (Halder *et al.*, 2010). Para las paredes celulares, la permeabilidad en tubérculos no está disponible, sin embargo, la permeabilidad del agua a través de las paredes celulares de madera de abeto se encuentra en el rango de 4.03×10^{-21} a 67.5×10^{-21} m² (Palin y Petty, 1983) que

pueden ser valores representativos para tubérculos debido a que también son células vegetales y sus paredes celulares exhiben estructura similar. Para las membranas celulares, la permeabilidad para células de papa es del orden de 10^{-24} m². Debido a que la permeabilidad en la membrana celular exhibe tres órdenes de magnitud menos que la permeabilidad en las paredes celulares, es probable que sea membrana celular la resistencia que controla el transporte de humedad en el secado a bajas temperaturas.

Los tejidos celulares son arreglos constituidos por un conjunto organizado de células. La membrana celular es una envoltura que rodea la célula, la comunica con el medio externo y la aísla al mismo tiempo. Por otro lado, la pared celular es una capa rígida que se localiza en el exterior de la membrana celular y actúa como compartimiento celular mediando en todas las relaciones de la célula con el entorno, protege los contenidos de la célula, da rigidez a la estructura celular y soporte a los tejidos. Los espacios intercelulares son los espacios existentes entre las células del arreglo del tejido celular.

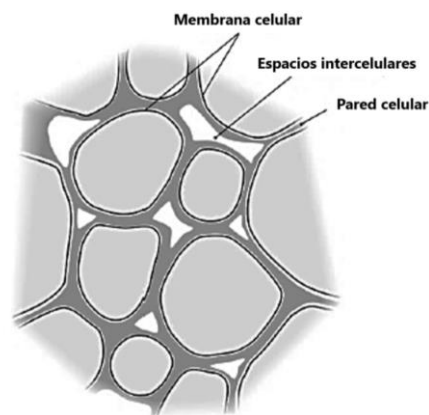


Figura 6. Estructura celular.

Como se mencionó anteriormente, el flujo en un medio poroso no saturado está dado por la ecuación 4.10, que se puede reescribirse en términos de un gradiente de concentración:

$$n_w = -\rho_w \frac{k_{eff}}{\mu_w} \frac{\Delta p_w}{\Delta c_w} \frac{\Delta c_w}{\Delta x} \quad (4.13)$$

O bien:

$$n_w = -\rho_w \frac{k_{eff}}{\mu_w} \frac{\Delta p_w}{\Delta c_w} \nabla c_w = -D_c \nabla c_w \quad (4.14)$$

Donde D_c representa un coeficiente denominado difusividad capilar (no difusividad molecular) del agua a través de la membrana celular, representado por la expresión:

$$D_c = \rho_w \frac{k_{eff}}{\mu_w} \frac{\Delta p_w}{\Delta c_w} = \rho_w \frac{k_{eff}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial c_w} \quad (4.15)$$

En la práctica, el coeficiente D_c es tratado como una difusividad efectiva, que incluye todos los mecanismos de transporte presentes en el sistema, incluyendo la capilaridad. La ecuación 4.14 muestra que D_c depende de la permeabilidad. En base a la discusión previa, en la que se dedujo que la permeabilidad de las membranas celulares es la resistencia que controla el secado a bajas temperaturas (debido a que permanecen intactas), podemos considerar que la permeabilidad relevante en la difusividad capilar, D_c , es la permeabilidad de las membranas celulares.

Halder *et al.* (2010) calcularon valores de difusividad capilar D_c utilizando la ecuación 4.14 y los datos de las isotermas de humedad para tejidos de papa reportadas por Ratti *et al.* (1989), tomando en cuenta que la permeabilidad de la membrana celular de tejidos de papa es del orden de 10^{-21} m² (Rotstein y Cornish, 1978). Los valores obtenidos por Halder *et al.* se encuentran en el dominio de 10^{-11} m²/s, mostrando el mismo orden de magnitud que los valores experimentales

reportados por Saravacos (1967). A temperaturas bajas de secado, las membranas celulares están intactas, por lo que el valor de difusividad capilar obtenido corresponde a la vía intracelular.

Por el contrario, a altas temperaturas, las membranas celulares se rompen y liberan agua en el espacio extracelular, por lo tanto, el transporte de agua hacia el exterior se produce predominantemente a través del espacio extracelular. La aplicación de la ley de Darcy en el espacio intercelular, el flujo de agua se puede escribir como:

$$n_w = -\rho_w \frac{k_{out}}{\mu_w} \frac{\Delta p_w}{\Delta x} \quad (4.16)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación 4.10, por lo que D_c para la migración a de humedad a altas temperaturas puede expresarse de la forma:

$$D_c = -\rho_w \frac{k_{out}}{\mu_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (4.17)$$

La principal diferencia entre el valor de difusividad capilar a altas y bajas temperaturas radica en los valores de permeabilidad correspondientes. Para altas temperaturas, la permeabilidad que rige el transporte es la permeabilidad de los espacios intercelulares, Las permeabilidades de tejidos de papa reportadas son del orden de 10^{-18} m^2 (Datta, 2006), estos datos representan la permeabilidad a través de la mayoría de los poros en el espacio intercelular (Halder *et al.*, 2010).

De esta manera, el término difusividad capilar, D_c , involucra todos los mecanismos de transporte presentes en el sistema, incluyendo la capilaridad. Este

coeficiente se encuentra en función del contenido de humedad y representa la movilidad de agua libre. Sustituyendo la difusividad capilar en una ecuación diferencial ordinaria que represente la movilidad del líquido por capilaridad, la movilidad del agua líquida se expresa por:

$$\frac{dc_i}{dt} = -D_c \frac{dc_i}{ds} \quad (4.18)$$

Donde c_i representa la concentración de agua y s la distancia recorrida por el fluido. Incorporando el término de difusividad capilar como coeficiente de proporcionalidad en la ecuación de Darcy para el movimiento capilar del agua líquida (Ecuación 4.6):

$$n_l = \begin{cases} -D_c \nabla c_l & , \quad W \geq W_c \\ 0 & , \quad W < W_c \end{cases} \quad (4.19)$$

Que representa el flux másico de la fase líquida en términos de la difusividad capilar y el contenido de humedad.

4.4.2 Flux de la fase gaseosa

Se asume que la fase gaseosa consiste en una mezcla binaria de vapor de agua y aire seco, y sus concentraciones son obtenidas de la solución de sus respectivas fracciones másicas, ω_v y ω_a . Las concentraciones de vapor de agua y aire (c_v y c_a respectivamente) están relacionadas con la concentración de la fase gaseosa por sus respectivas fracciones másicas (Gulati y Datta, 2015), es decir:

$$c_v = \omega_v c_g \quad (4.20)$$

$$c_a = \omega_a c_g$$

La fracción másica de vapor de agua se obtiene resolviendo la ecuación:

$$\frac{\partial(\omega_v c_g)}{\partial t} + \nabla(n_v) = 0 \quad (4.21)$$

Donde c_g es la concentración de agua líquida en la fase gaseosa, ω_v es la fracción másica del vapor de agua y n_v representa el flux másico de vapor de agua. La fracción másica de vapor de agua se obtiene resolviendo la ecuación 4.20 y la fracción másica de aire se obtiene a través de una diferencia, tomando en cuenta que la fase gaseosa es una mezcla binaria de aire y vapor de agua, por lo que:

$$\omega_a = 1 - \omega_v \quad (4.22)$$

El flux másico de vapor de agua es resultado de los gradientes de presión de la fase gaseosa (Datta, 2007) y a la difusión binaria con el aire (Gulati y Datta, 2015):

$$n_v = -\rho_v \frac{k_g}{\mu_g} \nabla P_g - \rho_g D_{eff} \nabla x_v \quad (4.23)$$

Donde k_g es la permeabilidad del gas, ρ_g y μ_g son la densidad y viscosidad de la fase gaseosa, respectivamente. El mecanismo de transporte principal que rige el flux másico de la fase de vapor de agua difusión (Datta, 2007; Dhall y Datta, 2011; Gulati y Datta, 2015), por lo que puede despreciarse el efecto de la presión del gas

y asumir que el flux neto de vapor de agua se da únicamente por difusión, por lo tanto, la ecuación 4.22 se resume a:

$$n_v = \begin{cases} 0 & , \quad W \geq W_c \\ -\rho_g D_{eff} \nabla X_v = -\rho_g D_{eff} \nabla \left(\frac{P_v}{P_g} \right) & , \quad W < W_c \end{cases} \quad (4.24)$$

Donde D_{eff} es el coeficiente de difusión efectiva y x_v es la fracción molar de vapor en la fase gaseosa. Mientras que el flux del aire seco se representa por:

$$n_a = \begin{cases} 0 & , \quad W \geq W_c \\ -\rho_g D_{eff} \nabla X_a = -\rho_g D_{eff} \nabla \left(\frac{P_a}{P_g} \right) & , \quad W < W_c \end{cases} \quad (4.25)$$

4.4.3 Flux debido a los cambios de tensión en el material

El modelo considera que existe una aportación adicional a la transferencia de masa, la cual se debe a los cambios de tensión en el dominio del material.

Los cambios de tensión son consecuencia de la variación de la presión interna del material sufrida por la evacuación del agua líquida, principalmente. Esta aportación se expresa matemáticamente como:

$$n_\sigma = -\frac{\rho k_l}{\phi S_l \mu_l} \nabla P_l \quad (4.26)$$

4.5 Condiciones límite

En la superficie del material, la transferencia de calor se lleva a cabo por convección entre el material y el agente de secado (aire), por lo que puede utilizarse la ecuación de enfriamiento de Newton para convección de calor en la superficie del material. De manera análoga, puede se escribió una ecuación para la transferencia de masa en la superficie del material, añadiendo un término de cambio de fase. Para ambas ecuaciones es necesario el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor y masa, respectivamente.

Las condiciones límite para las ecuaciones de conservación del modelo se presentan en la Tabla 3. La Figura 7 muestra las fronteras de la geometría modelada. Las fronteras 1, 2 y 3 (en azul) están en expuestas al agente de secado (aire caliente), mientras que el eje axisimétrico (línea punteada roja) es parte del dominio del material.

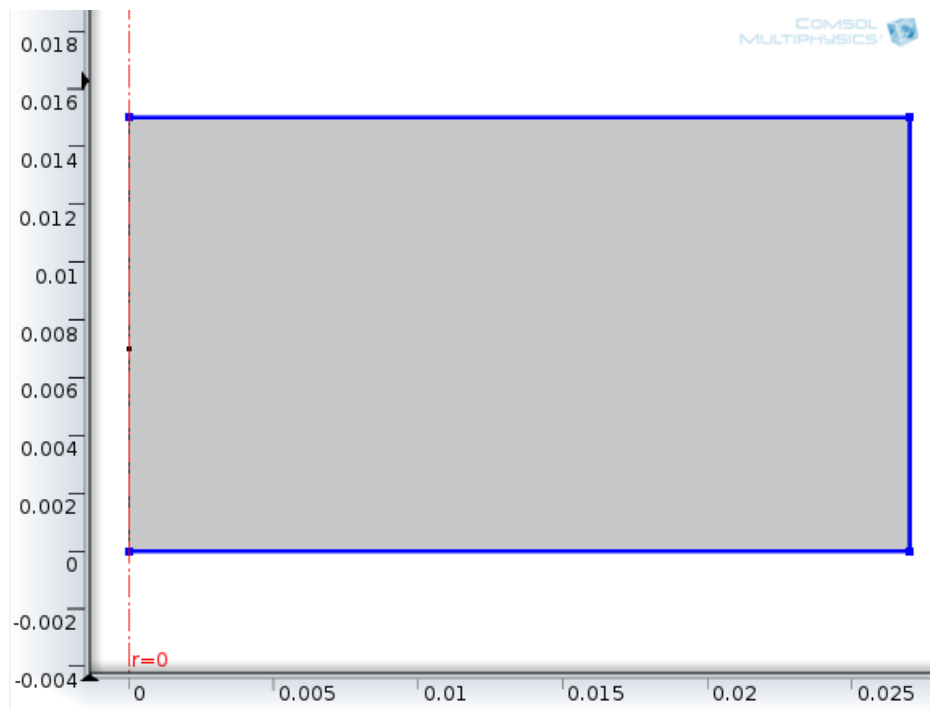


Figura 7. Fronteras de la geometría en COMSOL Multiphysics.

Tabla 3. Condiciones límite de las ecuaciones de conservación.

Ecuación de conservación	Condición en las Fronteras 1, 2 y 3	Condición en el eje axisimétrico
Contenido de Humedad (Eq. 1)	$-\vec{n} \cdot D_{eff} \nabla W _s = \frac{1}{\rho_s} h_m (C_{v\infty} - C_v^g)$	$-\vec{n} \cdot D_{eff} \nabla W _{axis} = 0$
Calor (Eq. 2)	$-\vec{n} \cdot k \nabla T _s = h_c (T_\infty - T_s) - \lambda [h_m (C_{v\infty} - C_v^g)]$	$-\vec{n} \cdot k \nabla T _{axis} = 0$
Aire seco (Eq. 3)	$\rho_a _s = \rho_{a\infty}$	$\rho_a _{axis} = \rho_a$
Tensión-deformación (Eq. 15)	$\sigma_f _s = P_\infty + \sigma_{AMS}$	$\sigma_f _{axis} = \sigma_f$
Desplazamientos (Eq. 15)	$u, v, w _1 = 0$; $u, v, w _{2,3} = libre$	$u, v, w _{axis} = 0$

4.6 Condiciones iniciales y parámetros de entrada

Las condiciones iniciales para las variables dependientes de las ecuaciones de conservación, así como los parámetros de entrada del modelo se enlistan en Tabla 4. El contenido de humedad inicial fue obtenido por el método de la estufa (como se menciona en el Capítulo 3). Los parámetros de entrada fueron obtenidos por medio de bibliografía o calculados con ecuaciones apropiadas.

Tabla 4. Condiciones iniciales y parámetros de entrada del modelo.

Parámetro	Valor	Unidad	Fuente
Condiciones iniciales			
Contenido de humedad inicial (W_i)	4.26 (40°C)	kg agua/kg materia seca	Experimental
Contenido de humedad inicial (W_i)	4.34 (50°C)	kg agua/kg materia seca	Experimental
Contenido de humedad inicial (W_i)	4.13 (60°C)	kg agua/kg materia seca	Experimental
Densidad del aire inicial (ρ_{a_i})	0.414 (40°C)	kg/m ³	Calculado
Densidad del aire inicial (ρ_{a_i})	0.402 (50°C)	kg/m ³	Calculado
Densidad del aire inicial (ρ_{a_i})	0.408 (60°C)	kg/m ³	Calculado

Temperatura inicial del material (T_i)	25	°C	Experimental
Presión inicial material (P_i)	2.5	MPa	Calculado

Condiciones de operación

Humedad relativa del secador (HR_∞)	0.25		
Presión del secador (P_∞)	101325	Pa	
Temperatura del aire de secado (T_∞)	40, 50 y 60°C	K	
Velocidad del aire de secado ($\langle v \rangle$)	1.5 m/s	m/s	
Altura inicial del cilindro (h_{cil})	0.015	m	
Radio inicial del cilindro (r_{cil})	0.027	m	

Parámetros generales de la papa

Potencial hídrico (ψ)	2.5	MPa	
Contenido de humedad crítico (W_c)	0.3	kg agua/kg materia seca	Chen, 2006
Saturación irreductible (S_{ir})	0.09		Datta, 2007B

Parámetros de la fase gaseosa

Calor específico del aire (C_{p_a})	1006	J/(kg K)	Mitrea, 2010
Calor específico del vapor (C_{p_v})	1804	J/(kg K)	Mitrea, 2010
Peso molecular del aire (PM_a)	29	kg/kmol	
Peso molecular del vapor (PM_v)	18	kg/kmol	
Presión inicial en el medio (P_{∞_i})	101325	Pa	
Permeabilidad intrínseca del gas (k_{i_g})	10×10^{-14}	m ²	Datta, 2007 b

Parámetros de la fase líquida

Calor específico del líquido (C_{p_l})	4184.4	J/(kg K)	Mitrea, 2010
Permeabilidad intrínseca del líquido (k_{i_l})	5×10^{-14}	m ²	Datta, 2007 b
Densidad del líquido (ρ_l)	994	kg/m ³	Datta, 2006
Volumen molar del agua líquida (v_w)	18	mol/m ³	

Parámetros de la fase sólida

Coficiente de Biot-Willis (α_B)	0.9		
Porosidad de sólido (ϕ)	0.88		Datta, 2006
Densidad del sólido (ρ_s)	1009	kg/m ³	Datta, 2006

4.7 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas caracterizan las propiedades del material que trata de modelarse, como una relación entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico. El propósito de estas ecuaciones es establecer conexiones entre los campos cinemático, térmico y mecánico, las cuales se requieren durante la solución de las ecuaciones diferenciales que describen el modelo (Rasmunson *et al.*, 2014).

4.7.1 Ecuaciones constitutivas de transporte

La Tabla 5 muestra las principales ecuaciones constitutivas utilizadas involucradas en los módulos de transferencia de masa y calor del modelo poroelástico.

Tabla 5. Ecuaciones constitutivas de trasporte.

Variable	Ecuación	Unidad	Fuente
Contenido de humedad (base húmeda)	$W_{bh} = \frac{W}{W + 1}$	kg _{agua} /kg _{totales}	
Propiedades de la papa			
Conductividad térmica de la papa	$k = 0.148 + 0.493W_{bh}$	W/(m K)	Wang y Brennan, 1992
Calor específico de la papa	$C_p = 4.184 \times 10^3 (0.406 + 0.00146T + 0.203W - 0.0249W^2)$	J/(kg K)	Wang y Brennan, 1992
Densidad de la papa	$\rho = 1780 - 1.05T$	kg/m ³	Tsami et al., 2000
Difusividad capilar	$D_c = 10^{-8} e^{-2.8+2W}$	m ² /s	Datta, 2007
Propiedades de la fase líquida			
Actividad de agua	$A_w = \begin{cases} A_w & , W < W_c \\ 1 & , W \geq W_c \end{cases}$		

Calor latente de vaporización	$\lambda = \left(2501.3 - \frac{2.301}{T[^\circ C]} - \frac{0.00142}{(T[^\circ C])^2} \right) \times 10^3$	J/kg	
Concentración superficial de líquido	$C_{l\,sup} = (1 - \phi)\rho_s W$	kg/m ³	
Permeabilidad del líquido	$k_l = k_{i_l} k_{r_l}$	m ²	Ni et al., 1999
Permeabilidad relativa al líquido	$k_{r_l} = \begin{cases} 0 & , S_l < S_{ir} \\ \left(\frac{S_l - S_{ir}}{1 - S_{ir}} \right)^3 & , S_l \geq S_{ir} \end{cases}$		Ni et al., 1999
Saturación de la fase líquida	$S_l = \frac{W_{bh}\rho_s(1 - \phi)}{(1 - W_{bh})\phi\rho_l}$		

Propiedades de la fase gaseosa

Concentración de vapor en la superficie	$C_{v\,sup} = 2.166 \times 10^{-3} \frac{P_v}{T}$	kg/m ³	
Densidad de la fase gaseosa	$\rho_g = \rho_v + \rho_a$	kg/m ³	
Densidad del vapor	$\rho_v = \frac{P_v P M_v \phi S_g}{RT}$	kg/m ³	
Densidad del aire	$\rho_a = C_a \phi S_g$	kg/m ³	
Coefficiente de difusividad efectiva	$D_{eff} = 1.0418 \times 10^{-5} \exp\left(\frac{-25.77}{8.314 \times 10^{-3} T}\right)$	m ² /s	Srikiatden y Roberts, 2006
Permeabilidad del gas	$k_g = k_{i_g} k_{r_g}$	m ²	Datta, 2007b
Permeabilidad relativa al gas	$k_{r_g} = \begin{cases} 0 & , S_l \leq \frac{1}{1.1} \\ 1 - 1.1S_l & , S_l > \frac{1}{1.1} \end{cases}$		Datta, 2007b
Presión del aire seco	$P_a = \frac{\rho_a RT}{P M_a}$	Pa	
Presión de la fase gaseosa (vapor + aire)	$P_g = P_v + P_a$	Pa	
Presión de la fase vapor en el dominio	$P_v = A_w P_{v\,sat}$	Pa	
Presión de vapor de saturación	$P_{v\,sat} = \exp\left(53.53 + \frac{6834.27}{T} - 5.169 \ln T\right)$	KPa	Brooker, 1967
Saturación de la fase gaseosa	$S_g = 1 - S_l$		
Fracción molar del vapor	$X_v = \frac{P_v}{P_g}$		
Fracción molar del aire	$X_a = \frac{P_a}{P_g}$		

4.7.2 Ecuaciones constitutivas para el cálculo de coeficientes de transferencia

Los coeficientes de transferencia son parámetros que suelen determinarse de forma experimental y cuyos valores dependen de otras variables que influyen en el proceso, como la geometría, las propiedades del fluido y la velocidad del mismo.

El coeficiente de transferencia de calor no es una propiedad del fluido. Es un parámetro que se determina en forma experimental y cuyo valor depende de todas las variables que influyen sobre la convección, como la configuración geométrica de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido, las propiedades de éste y la velocidad masiva del mismo. Para el cálculo de los coeficientes de transferencia se utilizaron las ecuaciones de la Tabla 6.

Tabla 6. Ecuaciones constitutivas para el cálculo de coeficientes de transferencia.

Variable	Ecuación	Unidad
Coeficiente de transferencia de calor	$h_c = \frac{Nu k_a}{L_c}$	W/(m ² K)
Coeficiente de transferencia de masa	$h_m = \frac{Sh D_{AB}}{L_c}$	m/s
Número de Reynolds para cilindros (Yunus y Çengel, 2006)	$Re = \frac{\rho_\infty \langle v \rangle L_c}{\mu_\infty}$	
Número de Nusselt	$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$	
Número de Prandtl	$Pr = \frac{\mu_\infty C_{p_\infty}}{k_\infty}$	
Número de Schmidt	$Sc = \frac{\nu_\infty}{D_{AB}}$	
Número de Sherwood	$Sh = 0.664 Re^{1/2} Sc^{1/3}$	

Longitud característica	$L_c = \frac{V}{A_s}$	m
Coefficiente de difusión vapor-aire (Çengel y Cimbala, 2006)	$D_{AB} = 1.87 \times 10^{-10} T^{2.072}$	m ² /s
Conductividad del aire (Çengel y Cimbala, 2006)	$k_\infty = 0.0000732110436223133T_\infty + 0.00367318753174902$	W/(m K)
Viscosidad dinámica del aire (Çengel y Cimbala, 2006)	$\mu_\infty = 0.000000142252457205966T_\infty + 0.0000209375342241858$	kg/(m s)
Viscosidad cinemática del aire	$\nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}$	Pa s

4.7.3 Ecuaciones constitutivas de mecánica de sólidos deformables

El modelo considera la conservación de masa y calor acoplada a un modelo de mecánica de sólidos deformables fundamentado en la teoría poroelástica de Biot. Dicho acoplamiento considera los cambios de presión causados por la migración de agua líquida y las deformaciones sufridas por el material como consecuencia de los cambios de tensión en la interacción fluido-sólido, por lo que fueron considerados parámetros de la mecánica de sólidos deformables como los parámetros de Lamé y los módulos de Young, Poisson, rigidez y compresibilidad, así como parámetros que representan tensiones celulares en el dominio, como el potencial osmótico y la tensión que ejerce el aire de secado en la superficie del material. La Tabla 7 presenta las ecuaciones constitutivas mecánicas utilizadas en el módulo poroelástico del modelo.

Tabla 7. Ecuaciones constitutivas de mecánica de sólidos deformables.

Variable	Ecuación	Unidad
Módulo de Compresibilidad	$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	Pa
Módulo de Poisson	$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} = \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}}$	

Módulo de Rigidez	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	Pa
Módulo de Young (Yang <i>et al.</i> , 2001)	$E = \begin{cases} 1.691 \times 10^7 \exp(-0.522W) & , W \geq 1 \\ 5.23 \times 10^7 \exp(-1.704W) & , W < 1 \end{cases}$	Pa
Primer parámetro de Lamé	$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)}$	
Segundo parámetro de Lamé	$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	
Tensión ejercida en la superficie por el aire de secado	$\sigma_{AMS} = \frac{\rho_{\infty} < \nu >^2}{2}$	Pa
Tensión celular en el dominio del material	$\sigma_i = \psi - \pi$	Pa
Potencial osmótico del material	$\pi = \nu_w RT \ln(A_w)$	Pa

4.8 Módulo poroelástico

Para definir deformación en materiales porosos, se deben definir a los esfuerzos (tensiones) y los desplazamientos resultantes. La teoría poroelástica involucra las ecuaciones de elasticidad lineal en las dos fases presentes en un material poroso: el sólido y el fluido. Para definir a los esfuerzos, se considera que el esfuerzo total (σ) se compone de dos partes; el esfuerzo provocado por el sólido (σ_s) y el esfuerzo provocado por el fluido. Debido a que la mayor contribución a las tensiones del material es la fase líquida, puede considerarse que el esfuerzo del fluido es el esfuerzo de la fase líquida (σ_l). De esta manera, el esfuerzo total en el sistema puede representarse matemáticamente como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_s + \nabla \cdot \sigma_l \quad (4.27)$$

Puesto que el esfuerzo del fluido es equivalente al esfuerzo de la fase líquida y aplicando el concepto de esfuerzo y porosidad, la Ecuación 4.27 puede reescribirse en términos de presión del líquido:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma_s + \phi(\nabla P_l) \quad (4.28)$$

4.8.1 Ecuación de conservación tensión-deformación

Puesto que se ha establecido que la tensión en el dominio está en función de las tensiones de la matriz sólida y del fluido, y que se han representado la relación de los desplazamientos en función de los esfuerzos a través de las ecuaciones de Lamé-Hooke, es posible escribir una ecuación de conservación que relacione las tensiones que ejerce el fluido con la deformación sufrida por el material.

La Ecuación 4.29 indica que las variaciones de la tensión del fluido al sólido y de la deformación volumétrica se deben a la variación de las tensiones en las direcciones axial y radial. Las variables dependientes de la ecuación de conservación tensión deformación son la tensión del fluido (σ_f) y los desplazamientos del material (u, v y z), los cuales son traducidos a deformación volumétrica (e_{vol}).

$$\underbrace{\rho S \frac{\partial \sigma_f}{\partial t}}_{\text{Elemento conservativo}} + \underbrace{\nabla \cdot \left(-\frac{\rho k}{\mu} \nabla \sigma_f \right)}_{\text{Contribución de la tensión del fluido al sólido}} + \underbrace{\rho \alpha_B \frac{\partial e_{vol}}{\partial t}}_{\text{Variación de la deformación volumétrica}} = 0 \quad (4.29)$$

La ecuación de conservación involucra dos parámetros poroelásticos relevantes: El primero es el coeficiente de Biot-Willis (α_B) que describe la eficiencia

de la presión del fluido para contrarrestar el esfuerzo total aplicado, y el segundo es el coeficiente de almacenamiento específico (S) que representa la cantidad de fluido que es evacuado por unidad de presión que disminuye.

4.9 Implementación del modelo en COMSOL Multiphysics

Una vez desarrollado el modelo poroelástico, se procedió a implementar las ecuaciones que lo constituyen en el simulador comercial COMSOL Multiphysics 4.3b, que es un paquete de software de análisis y resolución por elementos finitos para varias aplicaciones físicas y de ingeniería, especialmente fenómenos acoplados o multifísicos.

Las ecuaciones del modelo fueron resueltas para un tiempo de 72,000 segundos, con un paso de tiempo de 100 segundos, con una tolerancia relativa de 0.01 y utilizando un enmallado de 528 elementos, la cual se muestra en la Figura 8. El enmallado es la división del dominio en elementos finitos. La partición que forma se denomina también como discretización y el análisis del modelo se lleva a cabo para cada uno de los elementos que generados por la malla.

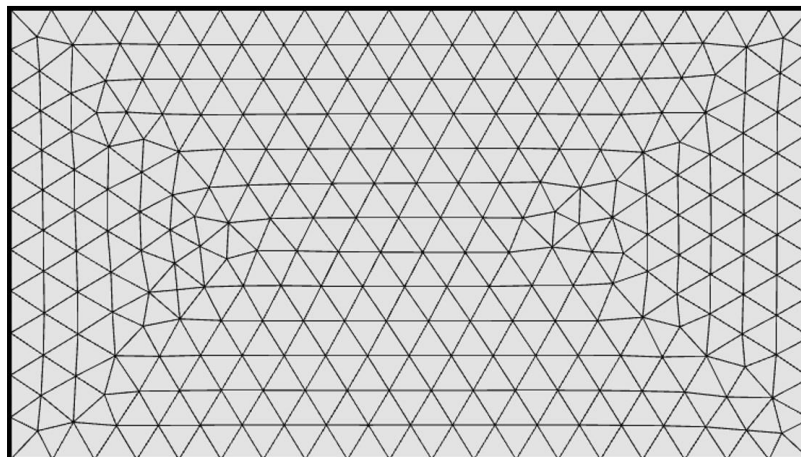


Figura 8. Enmallado utilizado para la simulación en COMSOL Multiphysics.

Como ya se había mencionado con anterioridad, el modelo fue construido con cinco módulos, tal como se muestra en la Figura 9. Se construyeron los módulos de transferencia de energía y humedad (agua líquida y vapor de agua), así como los módulos de aire seco, tensiones y deformaciones (poroelasticidad).

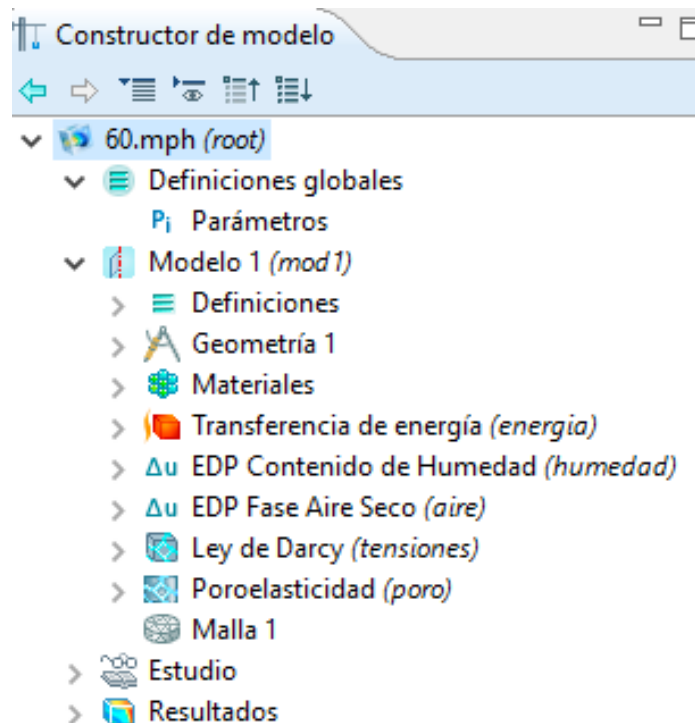


Figura 9. Constructor del modelo poroelástico en COMSOL Multiphysics

Los parámetros y variables del modelo fueron implementados de forma ordenada (Figura 10) para que el modelo pueda resolverse a condiciones de operación y condiciones iniciales diferentes. Las definiciones, que corresponden a las ecuaciones constitutivas del modelo, se ordenaron en cuatro grupos (Figura 11): Variables (ecuaciones constitutivas generales), Ecuaciones de Flux, Ecuación de GAB (que incluye las ecuaciones necesarias para el cálculo de los parámetros de dicha ecuación) y Parámetros Mecánicos.

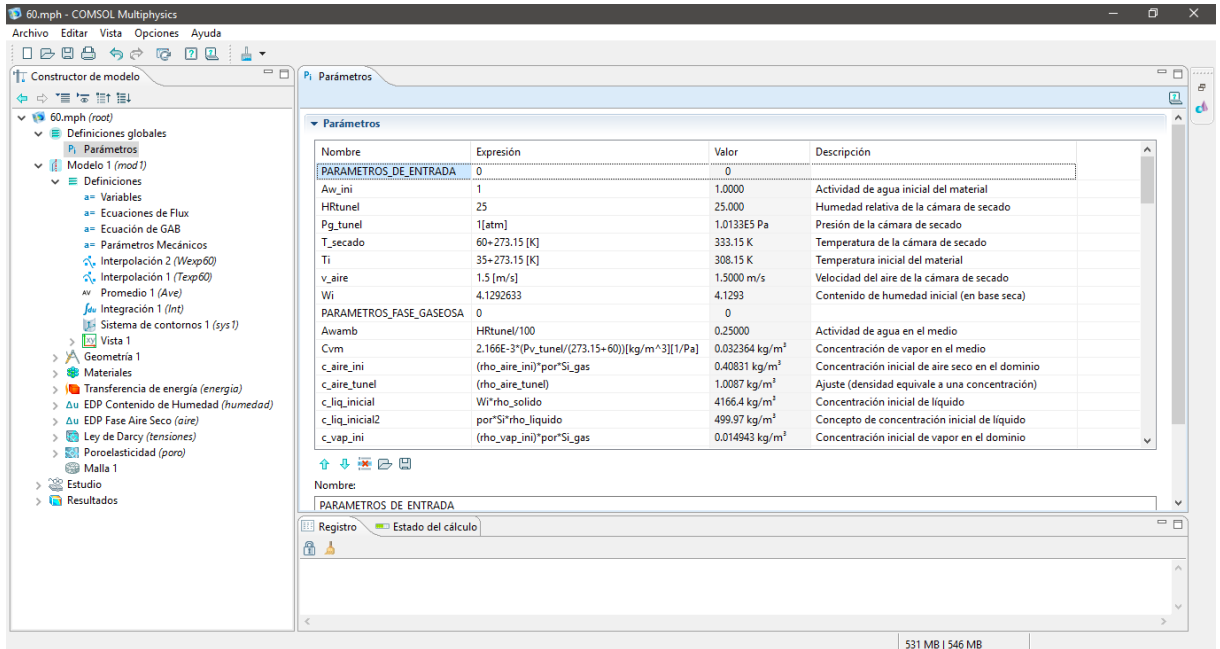


Figura 10. Visualización de los parámetros de entrada del modelo.

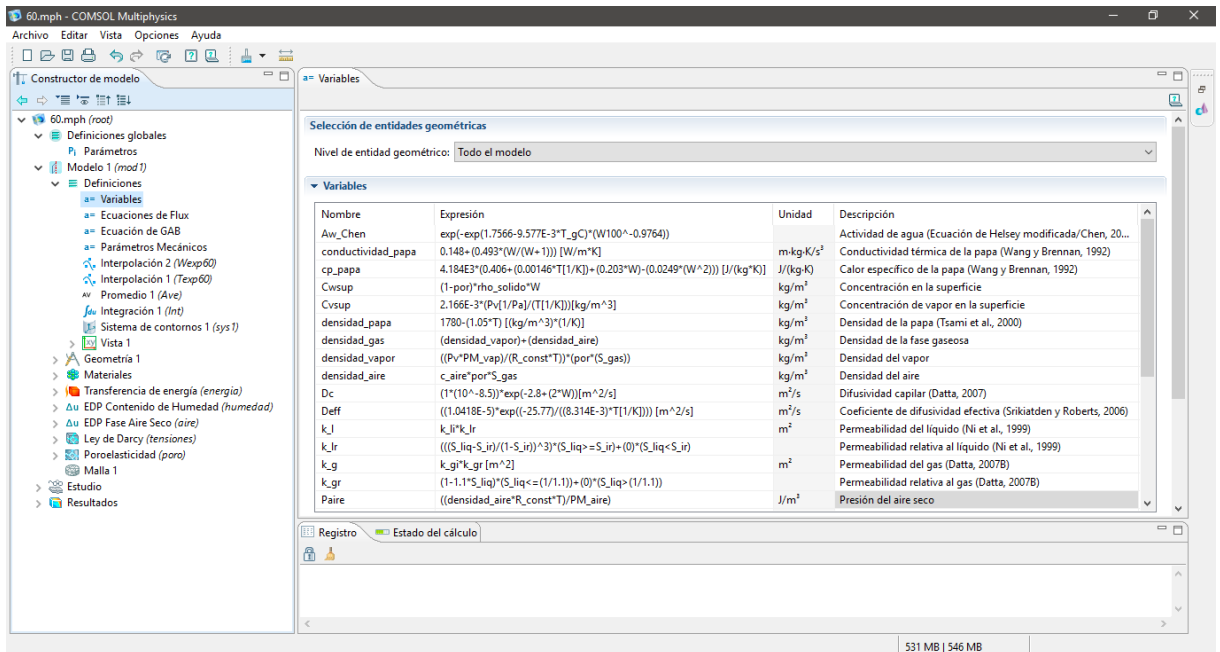


Figura 11. Visualización de la estructura de las definiciones del modelo.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS Y

DISCUSIÓN

CAPÍTULO 5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la validación del modelo, las cinéticas de pérdida de humedad y evolución de la temperatura del material simuladas por el modelo fueron comparadas con las obtenidas experimentalmente encontrando el error cuadrático medio, que representa una medida de variación o desviación de los datos del modelo con respecto a los valores reales y que también considera la aleatoriedad o el error. La expresión utilizada para el cálculo es:

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{exp,i} - x_{sim,i}}{x_{exp,i}} \right)^2$$

donde $x_{exp,i}$ y $x_{sim,i}$ son las cantidades i -ésimas (de contenido de humedad o temperatura) experimentales y simuladas, respectivamente, y n representa el número de datos a comparar.

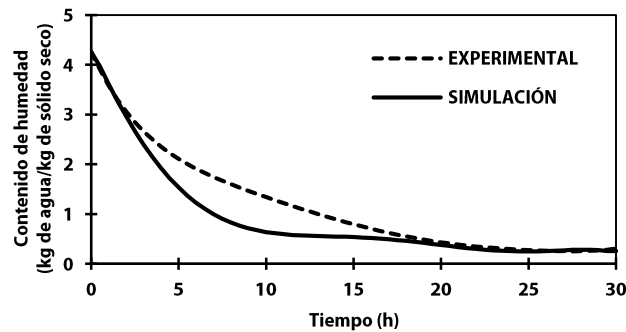
5.1 Cinéticas de secado

5.1.1 Pérdida de humedad en el material

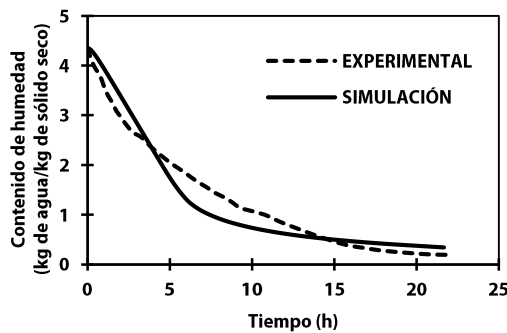
La Figura 12 muestra las comparaciones entre las cinéticas experimentales y las simuladas por el modelo poroelástico a 40, 50 y 60°C. Estas cinéticas describen la pérdida de humedad que sufren los cilindros de papa al ser sometidos a secado convectivo con una velocidad de aire de 1.5 m/s y 25% de humedad relativa.

Como puede observarse, el modelo desarrollado logra predecir el comportamiento de la migración de humedad en las muestras de papa. Los

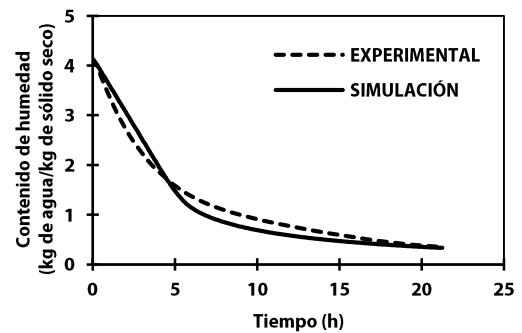
promedios de los errores cuadráticos medios calculados para cada par de cinéticas fueron de 8, 14 y 3% para 40, 50 y 60°C, respectivamente. El error cuadrático medio es un estimador que indica el promedio del porcentaje de error existente entre cada uno de los datos reales y su respectiva predicción.



a)



b)



c)

Figura 12. Cinéticas de pérdida de humedad durante el secado de cilindros de papa a tres diferentes temperaturas: a) 40°C, b) 50°C y c) 60°C.

En la Figura 13 se muestran los porcentajes de error antes de ser promediados para obtener los errores cuadráticos medios globales correspondientes. El comportamiento de la gráfica de la Figura 13 revela que el

modelo predice correctamente la reducción del contenido de humedad durante las primeras horas de secado, pero transcurridas cinco horas de haber comenzado el proceso los valores de las desviaciones comienzan a incrementarse hasta un 25, 10 y 5% aproximadamente para 40, 50 y 60°C, respectivamente, formando un sesgo en el comportamiento del porcentaje de error para las cinéticas estudiadas.

El error máximo existente en el sesgo se encuentra alrededor de las 10 horas de secado para las tres temperaturas estudiadas, tiempo después del cual los porcentajes de error comienzan a disminuir y a estabilizarse en el caso de las cinéticas de secado a 40 y 60°C, caso contrario para la simulación de pérdida de humedad a 50°C, que ve disminuidos los errores por un breve lapso de tiempo y estos vuelven a incrementarse a las 15 horas de secado hasta alcanzar un error de casi 65%, lo cual se debe al concepto matemático del cálculo de error y a los valores numéricos, puesto que en la Figura 12 se observa que la simulación a 50°C es la única que arrojó valores por debajo de los experimentales a tiempos mayores de 15 horas en donde el contenido de humedad es pequeño (menor a 0.5).

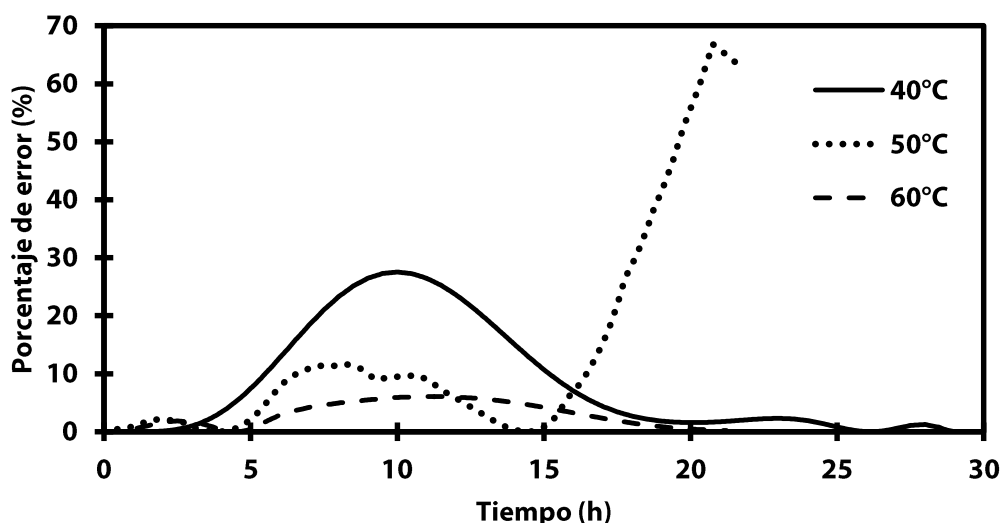


Figura 13. Comportamiento de los porcentajes de error entre las cinéticas experimentales y las simuladas por el modelo a 40, 50 y 60°C.

A pesar de que el promedio de los porcentajes de error de las simulaciones de pérdida de contenido de humedad son solo del 8, 14 y 3% para 40, 50 y 60°C, respectivamente, y que con ello podría asegurarse que el modelo poroelástico desarrollado describe correctamente las cinéticas de secado convectivo de papa, el comportamiento de los errores indica que existe un lapso de tiempo en el que el modelo no logra predecir de manera tan precisa dichas cinéticas. Este intervalo corresponde al sesgo en los porcentajes de error se encuentra entre las 5 y 10 horas de secado.

Puesto que el contenido de humedad inicial de las cinéticas es ligeramente distinto, se determinó el contenido de humedad reducido (adimensional) para estandarizar las gráficas y así poder compararlas en base a una misma escala. La adimensionalización se logra dividiendo cada uno de los valores de contenido de humedad entre el contenido de humedad de valor máximo, es decir, el contenido de humedad inicial.

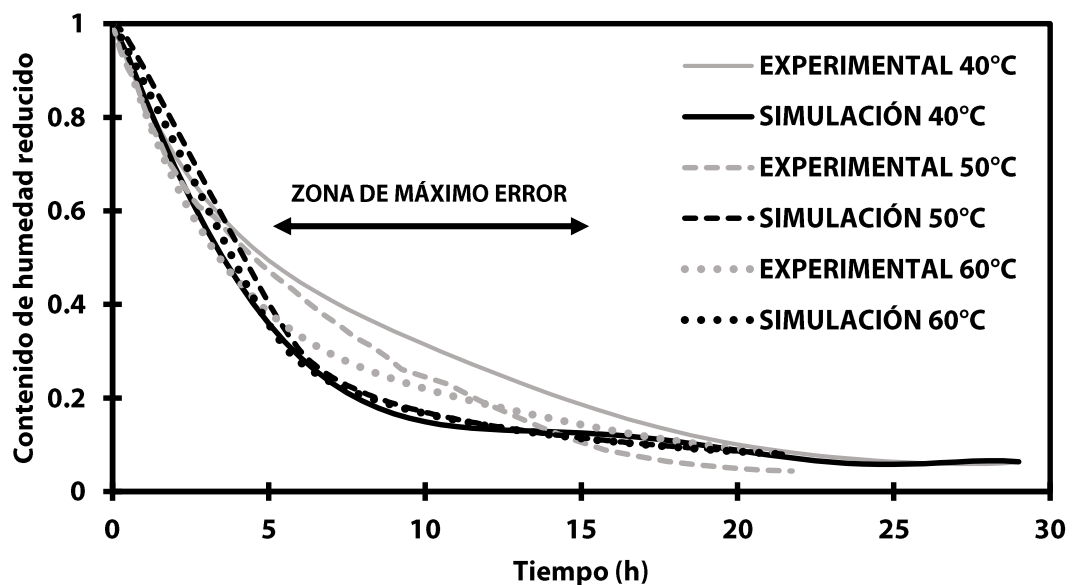


Figura 14. Cinéticas de contenido de humedad reducido a 40, 50 y 60°C.

La Figura 14 muestra las cinéticas de contenido de humedad reducido a 40, 50 y 60°C, en las que se observa que durante las primeras cinco horas de secado el contenido de humedad se reduce más de la mitad respecto al contenido de humedad inicial.

Tomando en cuenta que el contenido de humedad inicial promedio de la papa (*Solanum tuberosum*) utilizada en esta investigación es aproximadamente 4.25 kilogramos de agua por cada kilogramos de sólido seco, se es correcto precisar que más del 80% de la composición del material es agua en fase líquida principalmente, por lo cual al inicio del proceso, el flux de la fase líquida es quien domina el proceso, puesto que el material se encuentra saturado de agua líquida. Al transcurrir el tiempo, el contenido de humedad se ve disminuido drásticamente y por lo tanto el flux de la fase vapor comienza a intensificarse.

Según la teoría del secado, esta etapa corresponde al periodo de rapidez decreciente, el cual se caracteriza por la evaporación de la humedad a partir la superficie saturada, la cual está determinada por la difusión de vapor de agua desde una superficie saturada del material a través de una película que se encuentra en contacto con el aire. Este mecanismo es el que rige el proceso mientras el flujo de humedad al interior del material proporcione la suficiente humedad a la superficie para mantenerla saturada.

Para determinar la extensión del periodo de rapidez decreciente en las cinéticas de secado se obtuvo una gráfica de rapidez de secado reducido contra contenido de humedad reducido. La rapidez de secado se obtiene al encontrar la primera derivada de la función polinomial que describe la pérdida de humedad en el material respecto al tiempo.

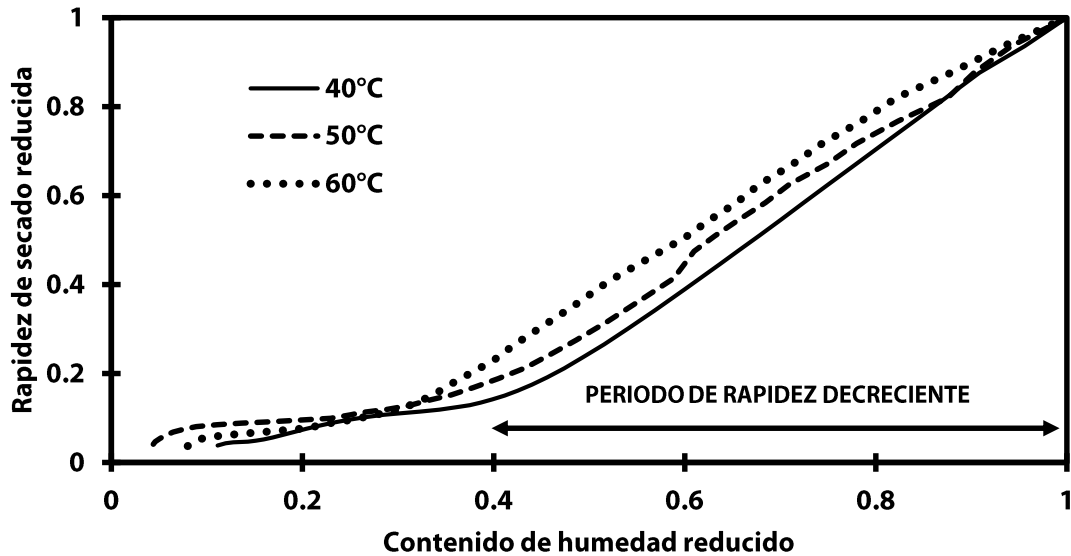


Figura 15. Rapidez de secado reducido contra contenido de humedad reducido de las simulaciones del modelo a 40, 50 y 60°C.

En la Figura 15 se observa que el período de rapidez decreciente comprende aproximadamente el intervalo de 0.4 a 1 de contenido de humedad reducido. Al comparar dichos valores con la Figura 14 se determina que este período abarca aproximadamente las primeras cinco horas de secado, tiempo en el que las muestras de papa pierden alrededor del 40% de su composición original, tal como se observa en la Figura 25, que muestra los perfiles de humedad en el material a diferentes tiempos. Dichos perfiles muestran la distribución de la humedad en el material en dos dimensiones, puesto que las cinéticas de secado muestran el contenido de humedad de manera global. Puede observarse que el modelo responde de manera coherente a la convección forzada, ya que el contenido de humedad es menor en la superficie del material que en la superficie, puesto que es la superficie la que se encuentra en contacto directo con el agente de secado, es decir, con el aire.

La Figura 16 muestra las cinéticas experimentales y las simuladas a 40, 50 y 60°C. Como puede observarse, el modelo desarrollado logra predecir el comportamiento de la cinética de secado. El error cuadrático medio de las cinéticas es de 0.084 kg de agua/kg de sólido seco, lo que significa que el promedio de las desviaciones existentes entre los datos reales y los simulados es de 0.084 kg de agua/kg de sólido seco, es decir, el 1.92% respecto al contenido de humedad inicial promedio de las muestras.

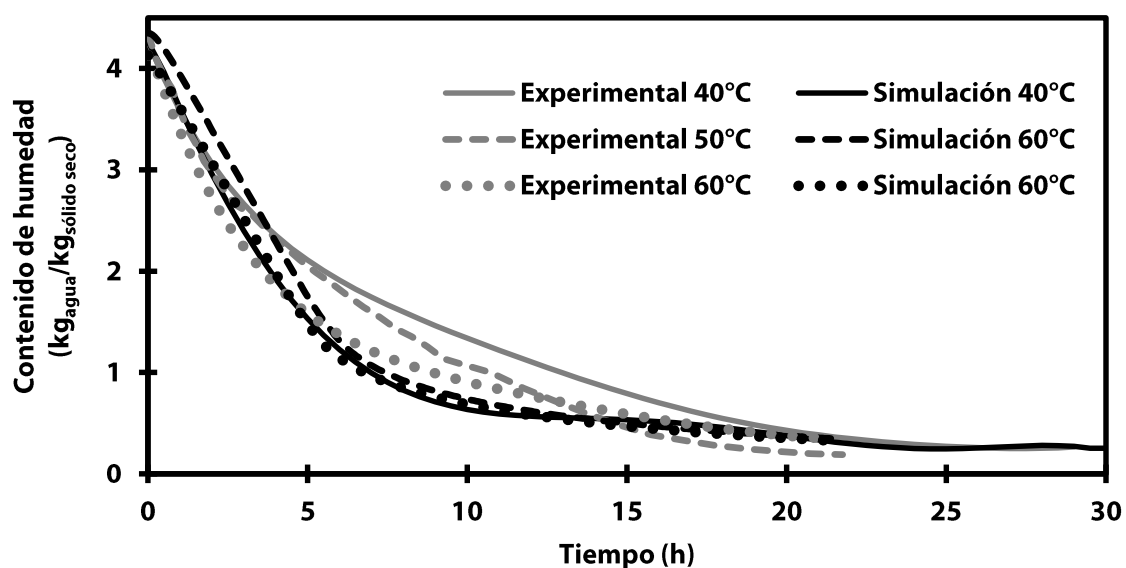


Figura 16. Cinéticas experimentales y simuladas de contenido de humedad en cilindros de papa durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.

Un hecho interesante se muestra en la Figura 16, pues se observa que las muestras procesadas a 50°C presentan un contenido de humedad final menor que las muestras secadas a 60°C. Gulati y Datta (2015) estudiaron el fenómeno denominado *case-hardening*, el cual podría explicar el hecho de que las muestras de 50°C hayan secado más que las que fueron sometidas a secado a 60°C, pues durante la deshidratación de materiales biológicos y bajo ciertas condiciones de operación, puede formarse un endurecimiento del tejido superficial

(encostramiento). Esta capa endurecida o costra opone resistencia al transporte de humedad de las capas celulares de los tejidos interiores. Las evidencias experimentales demostraron la formación de *case-hardening* en las muestras de secado a 60°C, lo que limitó la migración de humedad para alcanzar un contenido de humedad más bajo.

5.1.2 Evolución de la temperatura superficial

La Figura 17 muestra la evolución de la temperatura superficial experimental y simulada de cilindros de papa a tres diferentes temperaturas (40, 50 y 60°C). Como puede observarse, el modelo predice correctamente las cinéticas evolución de la temperatura superficial. Se encontraron tres diferentes comportamientos del calentamiento del material: el primero a 40°C, experimenta un calentamiento suavizado, por lo cual deben pasar más de 10 horas para que se acerque a la temperatura del aire. El segundo comportamiento corresponde a un secado que experimenta un calentamiento acelerado, alcanzando la temperatura del aire a las dos horas. Por último, en el tercer comportamiento la curva de temperatura del experimento a 60°C presenta una forma sigmoideal. Para la condición a 60°C observamos un punto de inflexión a las siete horas de secado, en donde se observa un cambio de pendiente.

El cambio de pendiente es explicado por la ecuación límite para la transferencia de calor, en la cual se observa que la diferencia entre la temperatura del medio y la temperatura superficial es multiplicada por el coeficiente de transferencia de calor. Al ser 60°C una temperatura de secado mayor que 40°C, la diferencia entre la temperatura inicial del material también es significativamente

más grande (233% mayor respecto a 40°C), por lo que se necesita mayor energía para llegar al equilibrio que para las otras dos temperaturas estudiadas.

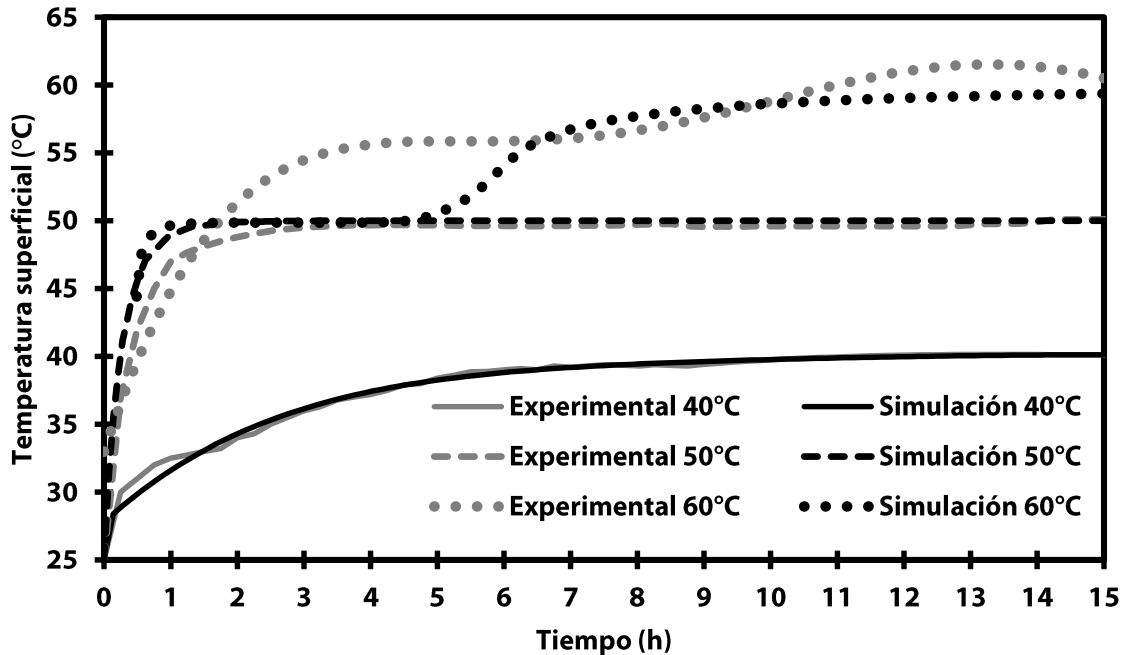


Figura 17. Perfiles de evolución de la temperatura experimentales y simulados en cilindros de papa durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.

El modelo propuesto considera que la migración de humedad sigue las dos vías propuestas por (Halder y Datta, 2010): la vía intracelular que se presenta por debajo de los 52°C cuando las membranas celulares permanecen intactas, y la vía extracelular, la cual ocurre a temperaturas superiores a 52°C, cuando existe rompimiento de las estructuras celulares del material. El modelo considera estas vías en el coeficiente de difusión capilar y en la descripción en términos del agua que se mueve desde el interior de las células a través de las membranas celulares y después a través de las paredes celulares en el espacio intercelular. Este transporte de humedad se lleva a cabo debido al gradiente de potencial de agua entre las células y los espacios intercelulares. Las membranas celulares, paredes celulares y

los espacios intercelulares ofrecen resistencia a la migración de humedad, sin embargo, puede expresarse el flujo de agua desde el interior de la célula hacia el exterior. El potencial de agua o potencial hídrico π es la fuerza motriz para el transporte de agua, dentro y fuera de la célula y se expresa como:

$$\pi_{w,intra} = \pi_{w,0} + R_g T \ln(a_{w,intra})$$

$$\pi_{w,extra} = \pi_{w,0} + R_g T \ln(a_{w,extra})$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial hídrico que conduce el flujo de agua desde el interior de la célula hacia el exterior está dada por la expresión:

$$\Delta\pi_w = R_g T \ln\left(\frac{a_{w,intra}}{a_{w,extra}}\right)$$

Donde R_g es la constante de los gases ideales, T es la temperatura de secado y a_w es la actividad de agua intracelular y extracelular respectivamente. Así mismo, el modelo incluye las isotermas de desorción para el cálculo de la presión de vapor.

5.2 Análisis de la deformación en el material

Para el cómputo del encogimiento (volumétrico) del material, se considera la relación entre el volumen en cada tiempo y el volumen inicial del material. Los desplazamientos obtenidos en las direcciones axial y radial dan lugar al cálculo de las dimensiones altura y radio, por lo que es posible estimar el volumen del material en cada tiempo tomando en cuenta la geometría original del material (cilindro). La Figura 18 muestra la evolución de la deformación volumétrica sufrida por el

material, la cual se define como el volumen en el tiempo respecto al volumen inicial.

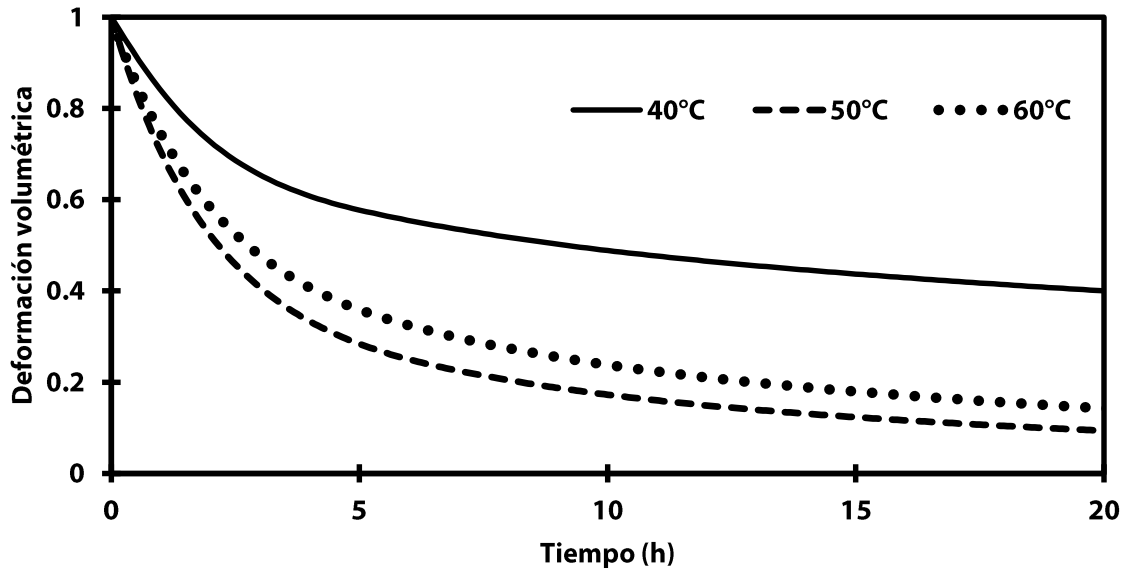


Figura 18. Evolución de la deformación volumétrica durante el proceso de secado convectivo de cilindros de papa a temperaturas de 40, 50 y 60°C.

Como puede observarse en la Figura 18 durante las primeras cinco horas de proceso el tubérculo experimenta la mayor deformación. Esto está relacionado con la pérdida de agua líquida (agua libre) durante las primeras horas del secado. Esta agua libre ejerce una presión en los poros del material y proporciona la tensión necesaria para mantener una estructura rígida al material. Al eliminarse el agua del material, el esqueleto sólido carece de la tensión necesaria en el interior y las tensiones externas causadas por el agente de secado (aire de secado) actúan sobre el material causando deformaciones importantes. Debido a la naturaleza del material y a su alto contenido de humedad, la presión de turgencia al en las células de la papa es elevado (2.5 MPa) al inicio del proceso. Este valor es calculado por el modelo poroelástico propuesto a partir de la presión osmótica, la presión hidrostática, la actividad de agua y la densidad molar del material.

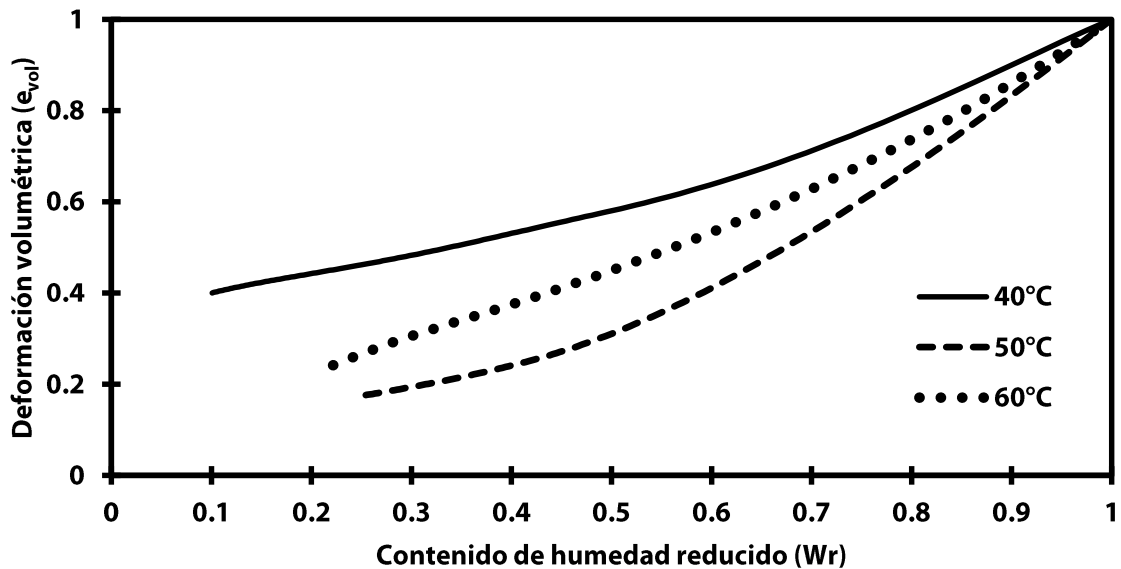


Figura 19. Evolución de la deformación volumétrica respecto al contenido de humedad reducido durante el proceso de secado convectivo de cilindros de papa a temperaturas de 40, 50 y 60°C.

La Figura 19 revela que la pendiente de la deformación volumétrica (rapidez de encogimiento), es mayor en las primeras horas de secado, es decir, cuando el alimento posee un alto contenido de humedad. Durante este tiempo es cuando la presión de turgencia disminuye de manera considerable. La presión de turgencia es un concepto que se emplea para nombrar a la presión que generan algunos líquidos en las paredes celulares y a la elasticidad que muestra la piel debido a la presión de los tejidos.

5.2.1 Deformación axial y radial

Los desplazamientos simulados permitieron el cálculo de las deformaciones radial y axial, obteniéndose en promedio un radio final de 0.008 m y una altura de

0.022 m, los cuales coinciden con las dimensiones finales correspondientes a los experimentos realizados. La Figura 20 muestra el comportamiento de la deformación axial y radial en el material. Se observa que las muestras sometidas a secado a 50°C son las que tuvieron mayor respuesta a la deformación. Esto puede deberse a un ablandamiento del material, y al nivel de temperatura que incrementa la migración de humedad e impide la formación del encostramiento o case-hardening propuesto por Gulati y Datta (2015).

A 50°C las muestras permiten la evacuación de agua líquida a una temperatura en la cual no existe rompimiento de las células, por lo que la deformación puede deberse a un reacomodo causado por los desplazamientos del material, en tanto que para el secado a 60°C se ha encontrado un rompimiento de las células característico del secado a altas temperaturas. Este rompimiento celular también representa una tensión interna adicional.

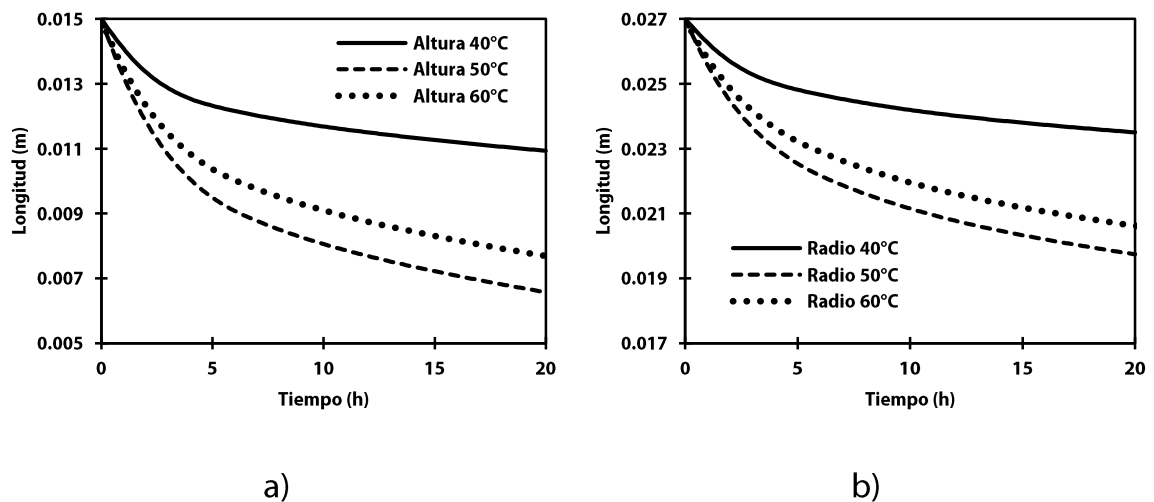


Figura 20. Evolución de la altura (a) y radio (b) de los cilindros de papa el proceso de secado convectivo a temperaturas de 40, 50 y 60°C.

En la Figura 21 pueden observarse tres muestras de papa después de ser sometidas a secado convectivo a 40, 50 y 60°C, respectivamente. Visualmente puede apreciarse que la muestra seca a 50°C presenta mayor efecto de deformación y oscurecimiento. Esto puede deberse

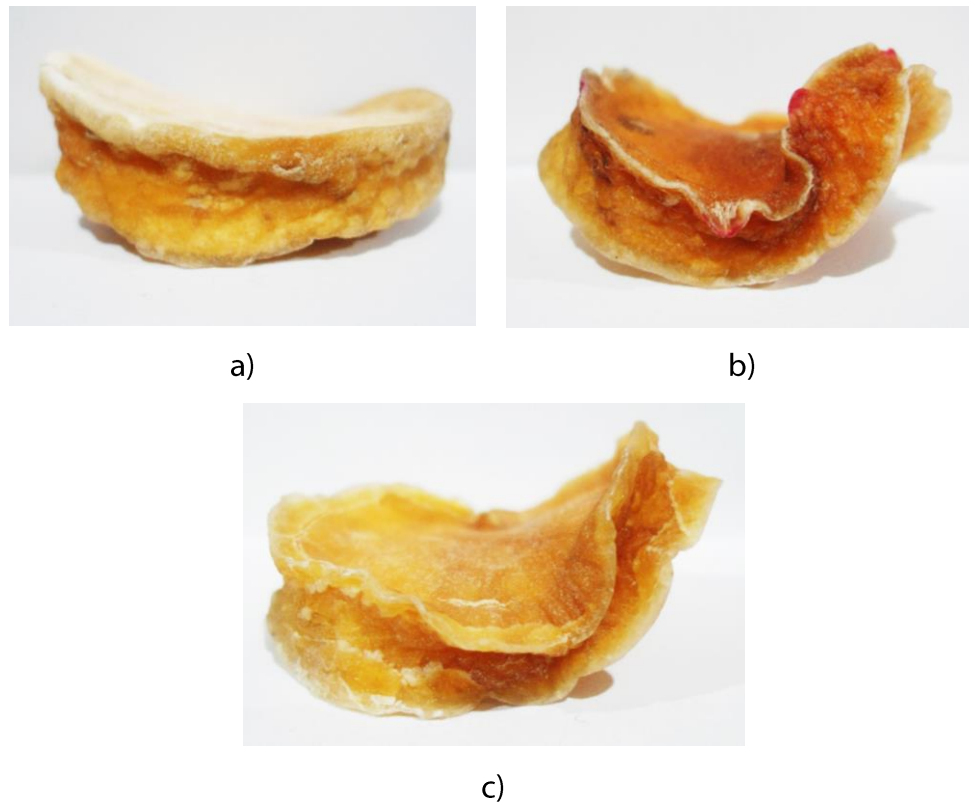


Figura 21. Muestras de papa secadas a temperaturas de a) 40, b) 50 y c) 60°C.

5.2.2 Análisis de los módulos elásticos

Se analizaron los Parámetros de Lamé mediante el módulo de Young, el cual presentó un comportamiento cercano a la linealidad que incrementa de 2.5 a 20 MPa (Figura 22). Dichos valores son comparables con los módulos de Young de goma y el cartílago, respectivamente.

Dichos valores sugieren que existe una transición en el comportamiento del material. Inicialmente, el material puede sugerirse que el material presenta un comportamiento gomoso, dado que es propenso a la deformación, pero al transcurrir el tiempo, el material se acerca a un comportamiento cartilaginoso (quebradizo), ya que al ser evacuada la mayor parte del agua, la matriz sólida no presenta tensión que pueda mantener su rigidez.

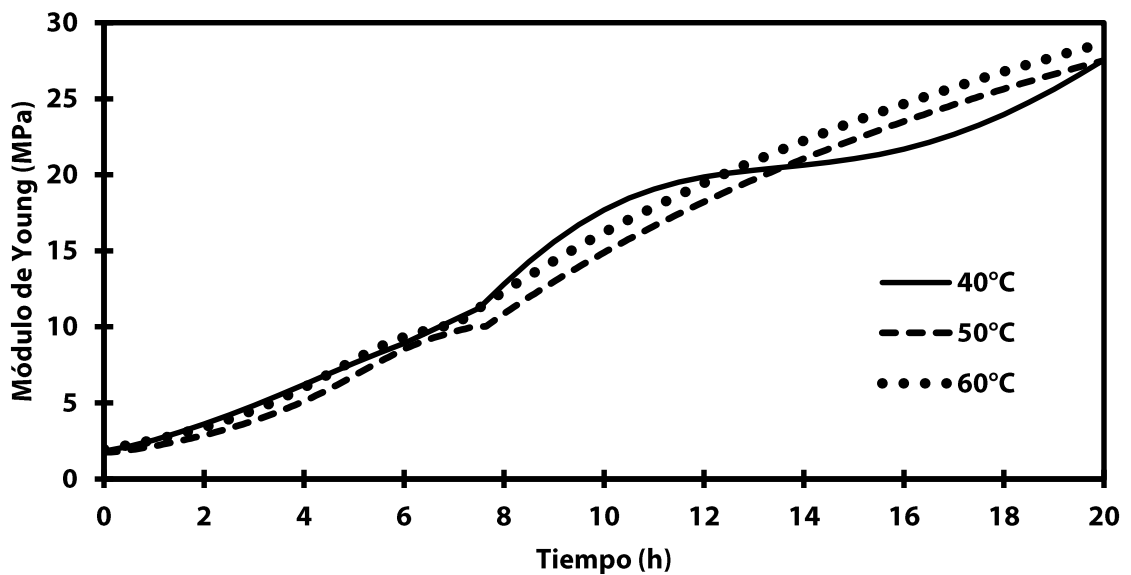


Figura 22. Evolución del módulo de Young durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.

Estos valores están asociados directamente con los cambios de longitud cuando son sometidos a tensiones internas y externas. El comportamiento aproximadamente lineal del módulo de Young nos indica que considerar a la papa como un material elástico lineal puede considerarse válido, y además, que la presión ejercida por el fluido a la matriz sólida influye de igual forma en las direcciones axial y radial.

Por otro lado, la Figura 23 muestra el comportamiento del Módulo de Poisson calculado a partir de las deformaciones simuladas, el cual también

presentó valores en el dominio de los valores de la goma y el cartílago. Tomando en cuenta que el módulo de Poisson se define como la el cociente entre la deformación radial y la deformación axial del material, a partir de la Figura 23 podemos determinar que alrededor de las primeras cinco horas de secado el material los cambios en las dimensiones del material son muy similares, sin embargo, de cinco a seis horas de secado, las deformaciones radiales comienzan a incrementarse, por lo que la relación entre las deformaciones decrece. Este intervalo coincide con las desviaciones observadas en las cinéticas de pérdida de humedad y puede deberse a que existe un reajuste en el esqueleto sólido debido a que la presión que mantiene rígida su estructura disminuye al evacuarse el agua líquida.

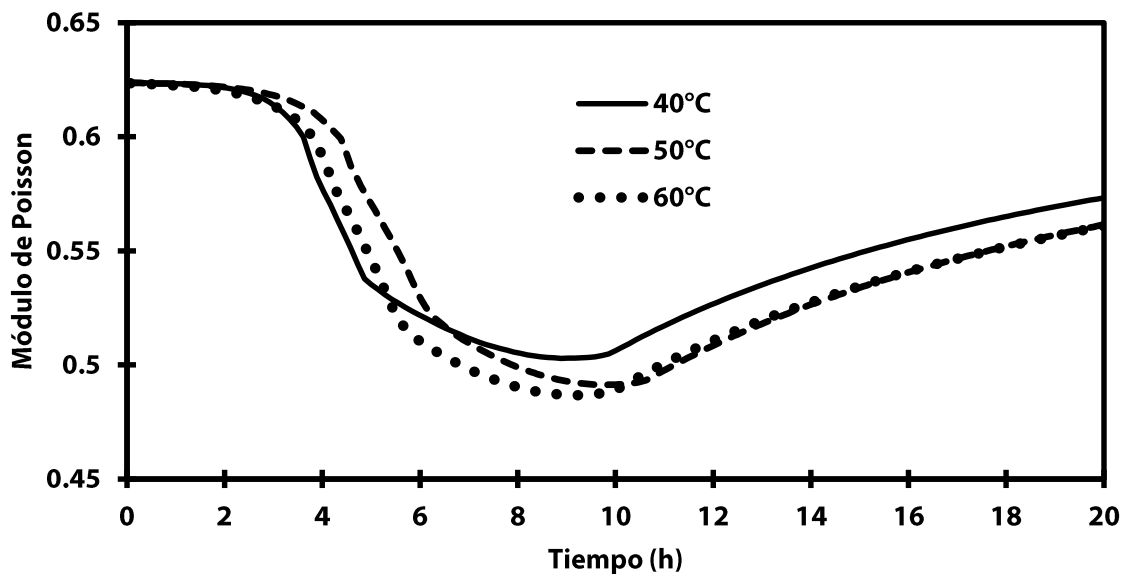


Figura 23. Evolución del módulo de Poisson durante secado convectivo a 40, 50 y 60°C.

Además, según Dhall y Datta (2011), durante el secado la papa experimenta dos comportamientos: el primero se da mientras el alimento está húmedo y es un comportamiento gomoso. Durante esta etapa el cambio del volumen es

aproximadamente igual a la pérdida de humedad. Cuando el alimento tiene en su interior un transporte en forma de vapor, el cambio de volumen es menor o igual a la pérdida de humedad y se encuentra en transición entre los dos comportamientos. Finalmente cuando el flux de vapor domina dentro del alimento el cambio de volumen debido a la pérdida de humedad es despreciable y entonces el alimento presenta un comportamiento vidrioso.

En la figura 23 podemos asociar la etapa de comportamiento gomoso a las primeras cinco horas de secado, la etapa de transición entre gomoso y vidrioso de 5 hasta 12 horas aproximadamente, y el comportamiento vidrioso a partir de las 12 horas. El comportamiento de los módulos de Young obtenidos con el modelo (Figura 22) concuerdan con los comportamientos encontrados por Dhall y Datta (2011). Sin embargo, no es posible comparar los valores obtenidos por nuestro modelo para el módulo de Poisson puesto que la mayoría de los autores han asumido el módulo de Poisson de la papa como constante al no existir datos de bibliografía. Por tanto, se propone que para el cálculo del módulo de Poisson en función del contenido de humedad (en base seca) para papa puede obtenerse con la ecuación:

$$\nu = -e^{3 \times 10^{-5} W^4 - 1.11 \times 10^{-3} W^3 + 1.06 \times 10^{-2} W^2 + 9.42 \times 10^{-4} W + 0.45}$$

Esta ecuación es una función polinomial ajustada, obtenida con los datos de la simulación del modelo poroelástico propuesto.

Por otro lado, la Figura 24 muestra la evolución del coeficiente de compresibilidad durante el secado de las muestras a 60°C. El coeficiente de compresibilidad cual mide la resistencia del material a la compresión uniforme y,

por tanto, indica el aumento de presión requerido para causar una disminución unitaria de volumen dado. El módulo de compresibilidad se define según la ecuación:

$$K = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)$$

Donde P es la presión, V es el volumen y ∂P y ∂V denotan los cambios de la presión y de volumen, respectivamente. El módulo de compresibilidad tiene dimensiones de presión.

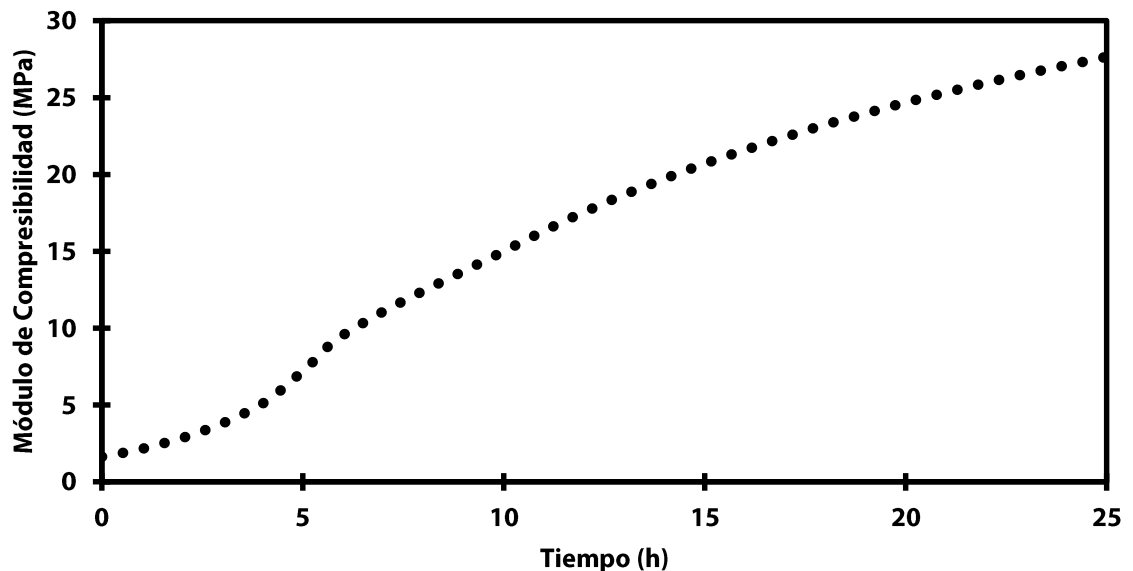


Figura 24. Evolución del coeficiente de compresibilidad durante el secado de cilindros de papa a 60°C.

La Figura 24 indica que al transcurrir el tiempo del proceso es necesario que la presión en el material sea mayor para que exista un cambio de volumen en el material. Por tanto, podemos entender que las deformaciones son más pequeñas a medida de que el tiempo transcurre debido a que el material necesita mayor presión para poder ver reflejada la deformación. Como puede observarse, a las 20 horas es necesaria una presión de 20 MPa para que el material sufra una unidad

volumétrica de deformación, lo cual no es, por lo que la deformación a las 20 horas de secado es considerada despreciable, pero no inexistente.

Finalmente, la Figura 25, muestra los perfiles del contenido de humedad del material a diferentes tiempos de secado a 50°C (temperatura a la que las muestras presentaron mayor respuesta a la deformación), así como los cambios de dimensiones axial y radial del material.

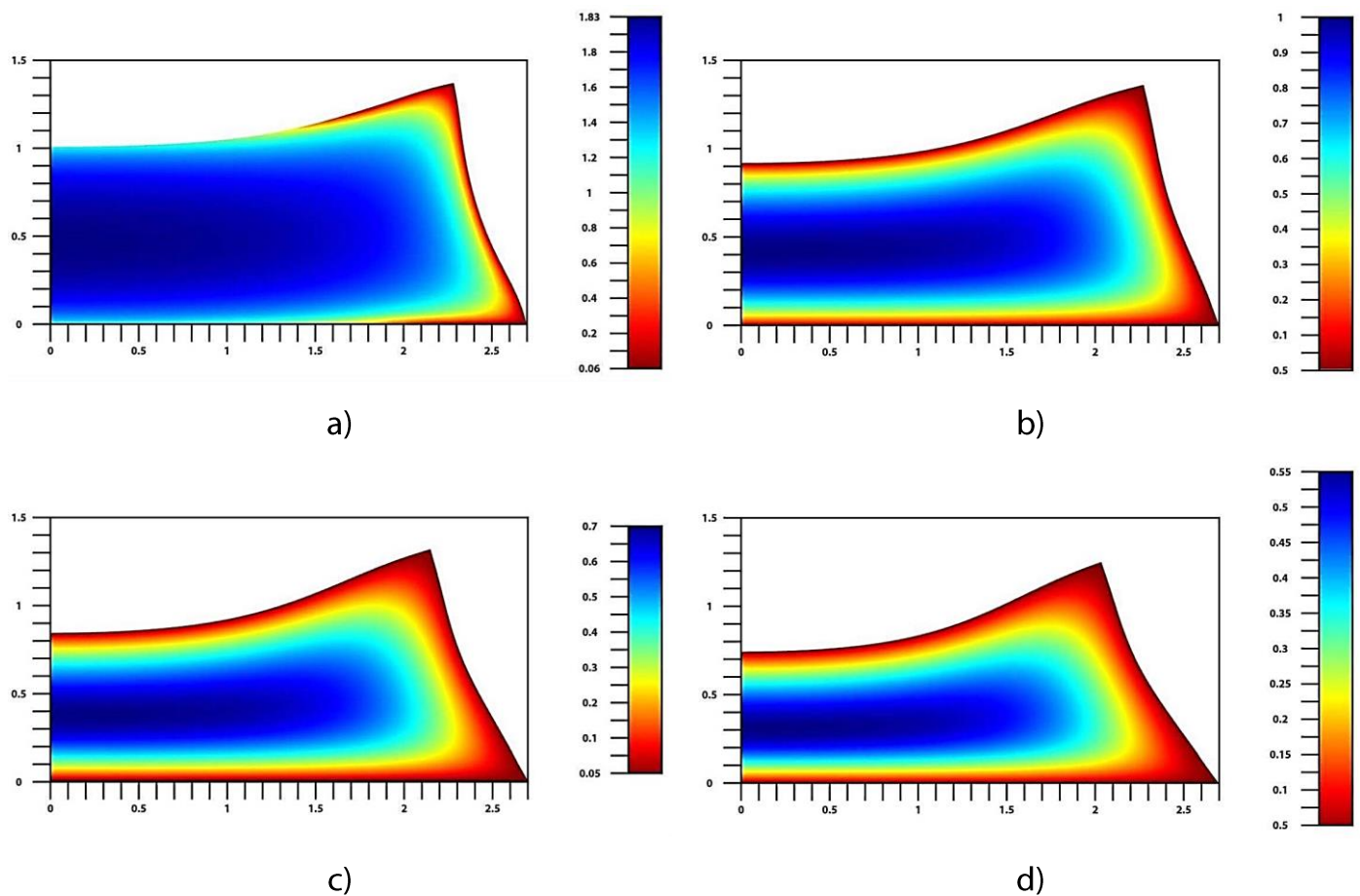


Figura 25. Evolución del contenido de humedad (en base seca) y dimensiones del material (m) a tiempos de a) 5 horas, b) 10 horas, c) 15 horas y d) 20 horas, durante el secado de cilindros de papa a 50°C.

5.3 Consideraciones para mejora del modelo poroelástico

Como se observa en la Figura 25, el modelo logra simular la deformación en geometría 2D axisimétrica, sin embargo, las desviaciones mostradas en las cinéticas de pérdida de humedad y evolución de temperatura del material también pueden deberse a la restricción que se aprecia en la misma Figura 25. Para el cálculo de las deformaciones, la frontera inferior tiene una condición de no deslizamiento, es decir, se restringe su deformación en este punto debido a que la geometría necesita una posición fija para poder iterar los valores y calcular los desplazamientos de las fronteras móviles. Esta restricción no sucede en la realidad, ya que el material se deforma de forma libre en todas las direcciones. Dicha imprecisión del modelo puede ser la causa de las desviaciones mostradas en las cinéticas previamente analizadas. Para mejorar el modelo se sugiere introducir una malla móvil que calcule las iteraciones a partir de diferentes posiciones.

Además, se sugiere realizar la experimentación correspondiente para calcular un coeficiente de Biot-Willis específico para la papa, ya que para el modelo desarrollado se utilizó un coeficiente de Biot-Willis con valor de 0.9, con base a los fundamentos de la teoría poroelástica.

Es importante recalcar que la teoría poroelástica de Biot fue desarrollada con base en la teoría de consolidación de suelos de Terzaghi. El modelo desarrollado es un primer acercamiento de la teoría poroelástica como aplicación en materiales alimentarios, por lo que sería necesario desarrollar un método experimental análogo para el cálculo de coeficientes poroelásticos, como el ya mencionado coeficiente de Biot-Willis o el coeficiente de almacenamiento específico.

5.4 Modelo poroelástico frente a otros modelos desarrollados

Además de validar el modelo poroelástico propuesto con datos de experimentos desarrollados específicamente para la presente investigación, se procedió a compararlo con los datos experimentales y simulaciones obtenidas de los modelos desarrollados por otros autores para observar la respuesta del modelo a geometrías y condiciones de operación diferentes a las previamente estudiadas.

Para tener acceso a los datos experimentales y simulaciones de diversos modelos desarrollados, se utilizó el software Xyscan, que es una herramienta para extraer los valores de los puntos de gráficas que están disponibles en formato de imagen. Para lograr la comparación con otros modelos desarrollados, los parámetros de entrada del modelo poroelástico fueron ajustados a las condiciones de secado y parámetros iniciales presentados por cada autor del modelo.

Específicamente se modificaron los siguientes parámetros: Altura del cilindro (h_{cil}), humedad relativa del secador (HR_{∞}), presión del secador (P_{∞}), radio del cilindro (r_{cil}), temperatura del aire de secado (T_{∞}), temperatura inicial del material (T_i), velocidad del aire de secado ($\langle v \rangle$) y contenido de humedad inicial (W_i).

La Figura 26 muestra las cinéticas de contenido de humedad reducido simuladas con el modelo poroelástico y su comparación con los datos experimentales obtenidos por Yang *et al.* (2001) y las simulaciones de los modelos propuestos por Gulati y Datta (2015) y Yang *et al.* (2001). La temperatura de secado fue a 60°C y la velocidad de aire a 1.5 m/s, mientras que la geometría utilizada fue cilíndrica con dimensiones de 3 cm de diámetro y 1.5 cm de altura.

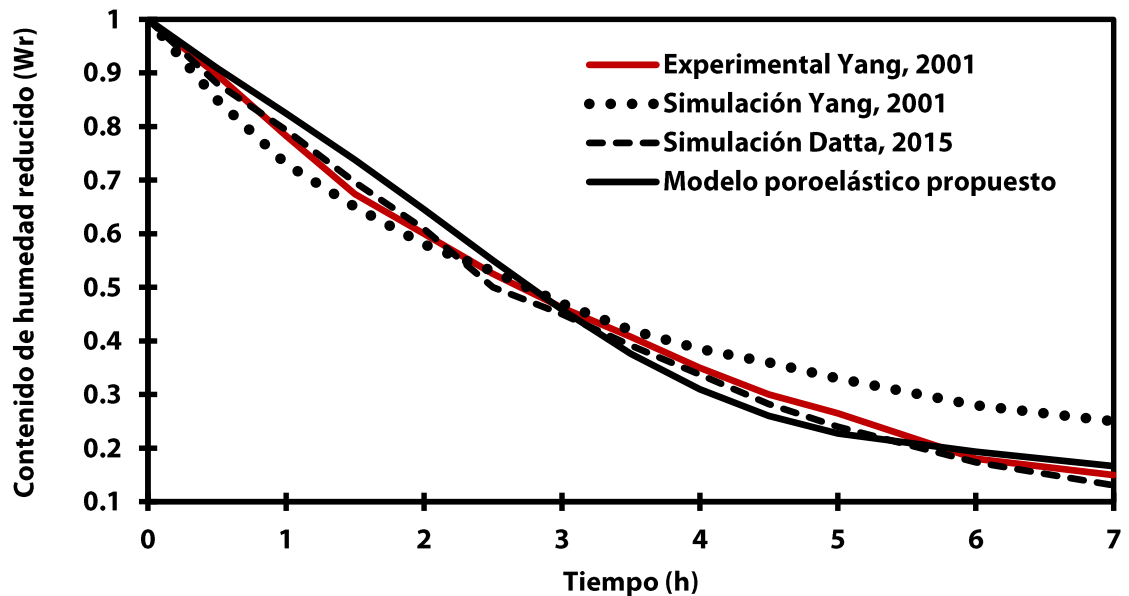


Figura 26. Cinéticas de contenido de humedad reducido del secado de cilindros de papa a temperatura de 60°C y velocidad de aire de 1.5 m/s.

La Figura 27 muestra la evolución del diámetro simulada con el modelo poroelástico propuesto y la obtenida de manera experimental por Yang (2001). Ambas Figuras (26 y 27) muestran que el modelo poroelástico logra responder al cambio de dimensiones en la geometría y al cambio de condiciones iniciales y de operación.

Por su parte, la Figura 28 muestra las cinéticas de contenido de humedad reducido simuladas con el modelo poroelástico y su comparación con los datos experimentales obtenidos por Aprajeeta *et al.* (2015) y las simulaciones de los modelos propuestos por Aprajeeta *et al.* (2015), Curcio y Aversa (2008) y Wang y Brennan (1998). La temperatura de secado fue a 72°C y la velocidad de aire a 0.25 m/s.

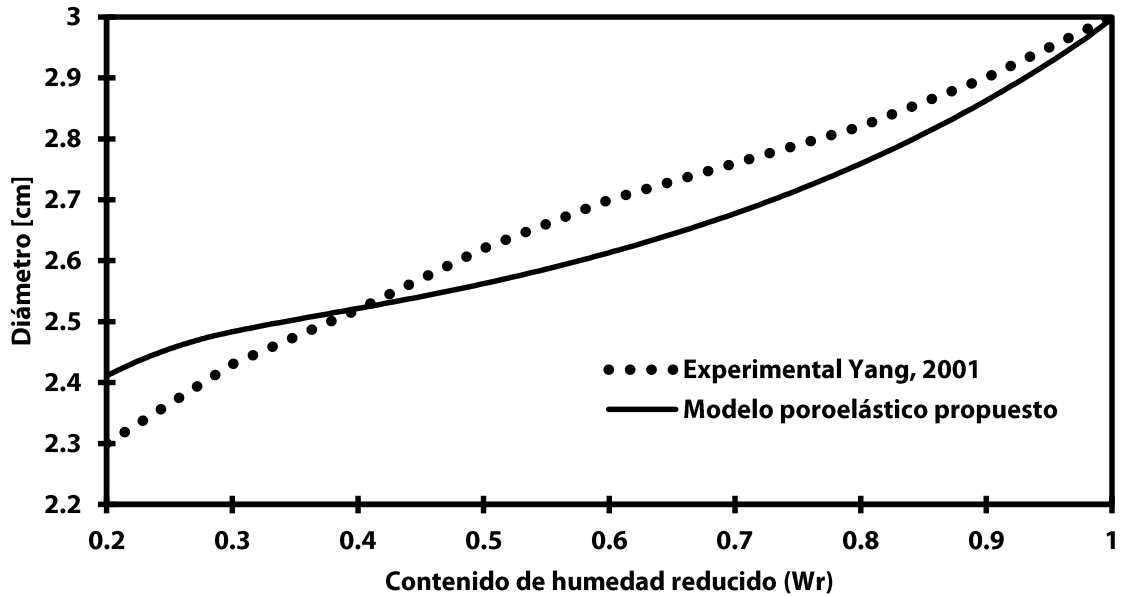


Figura 27. Evolución del diámetro de las muestras del secado de cilindros de papa a temperatura de 60°C y velocidad de aire de 1.5 m/s.

La geometría utilizada para las pruebas experimentales fue cilíndrica con dimensiones de 4.5 cm de diámetro y 0.7 cm de altura, sin embargo las simulaciones de los autores consideraron que la geometría podría asumirse como una rodaja, por lo que la simulación fue en dos dimensiones. Para las simulaciones del modelo poroelástico la geometría cilíndrica original fue respetada, por tanto las simulaciones se desarrollaron para una geometría 2D axisimétrica.

La Figura 29 muestra la simulación de la evolución del radio con el modelo poroelástico propuesto y la obtenida de manera experimental y simulada por Aprajeeta (2015). Como puede observarse, la simulación obtenida por el modelo poroelástico propuesto sigue la tendencia de la evolución radial experimental, la cual difiere de ser una línea recta con pendiente negativa como es propuesto por Aprajeeta (2015). El modelo poroelástico propuesto logró responder a los cambios

en las condiciones iniciales y de operación y a los cambios en las dimensiones de la geometría.

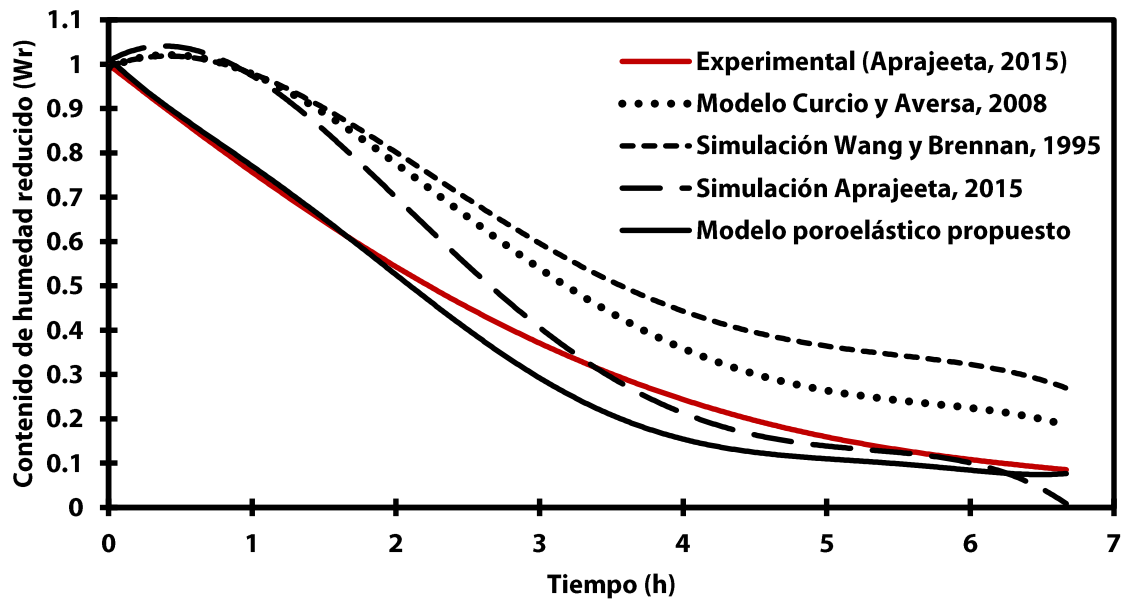


Figura 28. Cinéticas de contenido de humedad reducido del secado de cilindros de papa a temperatura de 72°C y velocidad de aire de 0.25 m/s.

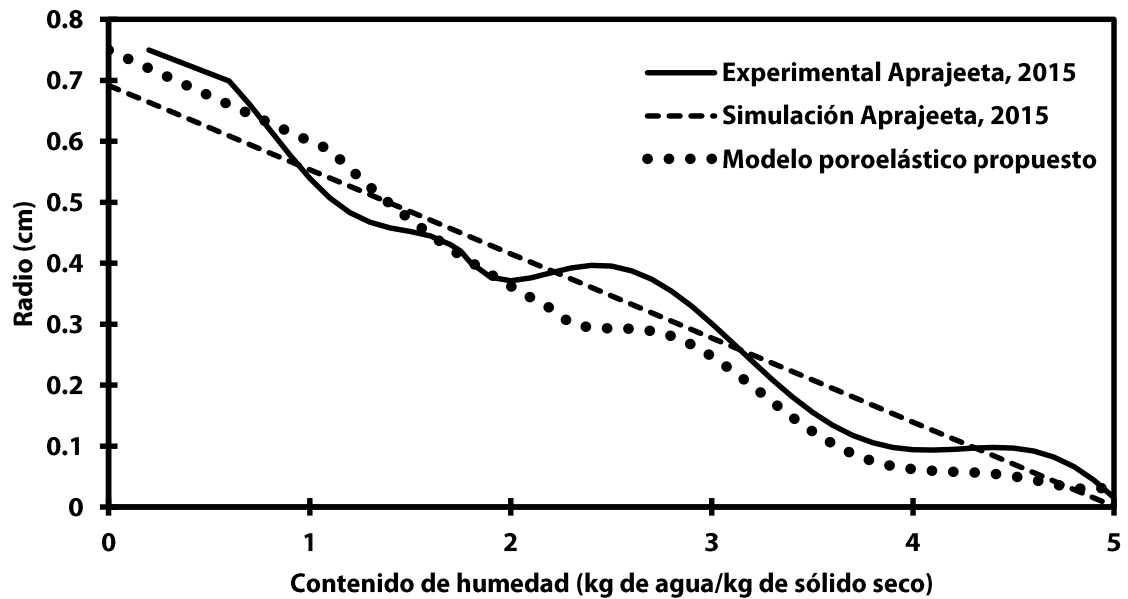


Figura 29. Evolución del radio de las muestras del secado de cilindros de papa a temperatura de 72°C y velocidad de aire de 0.25 m/s.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y

RECOMENDACIONES

CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las ecuaciones del modelo fueron resueltas en COMSOL Multiphysics 4.3b, con un paso de tiempo de 100 segundos y con una tolerancia relativa de 0.01. El modelo predice correctamente las cinéticas de secado, la evolución de la temperatura con ECM de 0.084 kg de agua/kg de sólido seco y 0.002°C, respectivamente.

Nuestra propuesta considera dos vías de migración de humedad: 1) intracelular (debajo de 52°C) donde las membranas celulares permanecen intactas, y 2) extracelular (por arriba de 52°C) en la cual existe rompimiento de las estructuras celulares del material. Las presiones de turgencia, osmótica e hidrostática fueron consideradas en la ecuación de poroelasticidad.

Los desplazamientos simulados permitieron el cálculo de las deformaciones radial y axial, obteniéndose en promedio un radio final de 0.008 m y una altura de 0.022 m. Se analizaron los Parámetros de Lamé mediante el módulo de Young de la papa, el cual presentó un comportamiento casi lineal que incrementa de 2.5 a 35 MPa, valores que son comparables con los módulos de Young de goma y cartílago, respectivamente.

Se encontraron dos tipos de comportamiento de la temperatura superficial del material: el primero a 40 y 50°C que es clásico de la ley de Fourier, y el segundo a 60°C que presenta una forma sigmoideal. Ambos comportamientos son simulados satisfactoriamente por el modelo. Se determinó que la presión ejercida por el fluido a la matriz sólida influye de igual forma en las direcciones axial y radial y no produce tensión tangencial alguna, sin embargo, las deformaciones si presentan

variaciones en ambas direcciones debido a que los parámetros de Lamé y el módulo de Young dependen de la variación del contenido de humedad. El modelo poroelástico propuesto logró responder a cambios en las condiciones iniciales y de operación, así como cambios en la geometría del material, presentando buena aproximación a valores experimentales obtenidos por otros autores.

Sin embargo, el modelo muestra desviaciones considerables en las cinéticas de pérdida de humedad y evolución de temperatura del materia, las cuales pueden ser causa de la restricción en la frontera inferior de la geometría axisimétrica, la cual tiene una condición de no deslizamiento, es decir, se restringe su deformación en la frontera inferior debido a que la geometría necesita una posición fija para poder iterar los valores y calcular los desplazamientos de las fronteras movibles. Esta restricción no sucede en la realidad, ya que el material se deforma de forma libre en todas las direcciones. Para lograr mayor precisión en las simulaciones del modelo se sugiere introducir una malla movable que calcule las iteraciones a partir de diferentes posiciones.

Además, se recomienda realizar la experimentación correspondiente para calcular un coeficiente de Biot-Willis específico para la papa, ya que para el modelo desarrollado se utilizó un coeficiente de Biot-Willis con valor de 0.9, con base a los fundamentos de la teoría poroelástica. El modelo desarrollado es un primer acercamiento de la teoría poroelástica como aplicación en materiales alimentarios, por lo que sería necesario desarrollar un método experimental análogo para el cálculo de coeficientes poroelásticos, como el ya mencionado coeficiente de Biot-Willis o el coeficiente de almacenamiento específico.

BIBLIOGRAFÍA

- Aprajeeta, J., Gopirajah, R. & Anandharamakrishnan, C., 2015. Shrinkage and porosity effects on heat and mass transfer during potato drying. *Journal of Food Engineering*, 144, pp.119–128. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2014.08.004>.
- Curcio, S. & Aversa, M., 2014. Influence of shrinkage on convective drying of fresh vegetables: A theoretical model. *Journal of Food Engineering*, 123, pp.36–49. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2013.09.014>.
- Datta, A.K., 2006. Hydraulic Permeability of Food Tissues. *International Journal of Food Properties*, 9(4), pp.767–780. Available at: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10942910600596167>.
- Datta, A.K., 2007. Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes. I: Problem formulations. *Journal of Food Engineering*.
- Dhall, A. & Datta, A.K., 2011. Transport in deformable food materials : A poromechanics approach. *Chemical Engineering Science*, 66(24), pp.6482–6497. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ces.2011.09.001>.
- Gee, G.W. et al., 1992. Rapid Measurement of Low Soil Water Potentials Using a Water Activity Meter. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 56(4), pp.1068–1070. Available at: <https://www.soils.org/publications/sssaj/abstracts/56/4/1068> \n <https://dl.sciencesocieties.org/publications/sssaj/pdfs/56/4/SS0560041068>.
- Gulati, T. & Datta, A.K., 2013. Enabling computer-aided food process engineering: Property estimation equations for transport phenomena-based models. *Journal of Food Engineering*, 116(2), pp.483–504. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2012.12.016>.
- Gulati, T. & Datta, A.K., 2015. Mechanistic understanding of case-hardening and

- texture development during drying of food materials. *Journal of Food Engineering*, 166, pp.119–138. Available at:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0260877415002435>.
- Gulati, T. & Datta, A.K., 2015. Mechanistic Understanding of Case-hardening and Texture Development During Drying of Food Materials. *JOURNAL OF FOOD ENGINEERING*. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2015.05.031>.
- Halder A., Datta A., S.R., 2010. Water Transport in Cellular Tissues During Thermal Processing. *AIChE Journal*, 57(11), pp.3199–3209.
- IBISWorld, 2014. Global Fruit & Vegetables Processing; IBISWorld Industry Report. *Global Fruit & Vegetables Processing*, (August).
- Jousse, F., 2008. Modeling to improve the efficiency of product and process development. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food ...*, 7, pp.175–181. Available at: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1541-4337.2007.00033.x/full>.
- Koç, B., Eren, I. & Kaymak Ertekin, F., 2008. Modelling bulk density, porosity and shrinkage of quince during drying: The effect of drying method. *Journal of Food Engineering*, 85(3), pp.340–349.
- Palin, M.A. & Petty, J.A., 1983. Permeability to water of the wood cell wall and its variation with temperature. *Wood Science and Technology*, 17(3), pp.187–193.
- Putranto, A. & Chen, X.D., 2013. Spatial Reaction Engineering Approach as an Alternative for Nonequilibrium Multiphase Mass-Transfer Model for Drying of Food and Biological Materials. , 59(1).
- Rasmunson, A. et al., 2014. *Mathematical Modeling in Chemical Engineering*, Cambridge University Press.
- Ratti, C., Crapiste, G.H. & Rotstein, E., 1989. A New Water Sorption Equilibrium Expression for Solid Foods based on Thermodynamic Considerations. *Journal of Food Science*, 54(3), pp.738–742. Available at:

<http://doi.wiley.com/10.1111/j.1365-2621.1989.tb04693.x>.

Rotstein, E. & Cornish, A.R.H., 1978. Influence of cellular membrane permeability on drying behavior. *Journal Food Science*, (43), pp.926–939.

Sandoval Torres, S. & Allier González, A.L., 2015. Linear and Nonlinear Drying Behavior in Tuberous Crop Slices. *Drying Technology*, 33(5), pp.559–569.

Available at:

<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07373937.2014.955919>.

Saravacos, G., 1967. Effect of drying method on the water sorption of dehydrated apple and potato. *Journal of Food Science*, (32), pp.81–84.

Wang, N. & Brennan, J.G., 1995. A mathematical model of simultaneous heat and moisture transfer during drying of potato. *Journal of Food Engineering*, 24(1), pp.47–60. Available at:

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0260877494P1607Y>.

Yang, H., Sakai, N. & Watanabe, M., 2001. Drying Model With Non-Isotropic Shrinkage Deformation Undergoing Simultaneous Heat and Mass Transfer. *Drying Technology*, 19(7), pp.1441–1460.