



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CIIDIR UNIDAD OAXACA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y
APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

**“EXTENSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE TIEMPO CORTO DE
FOURIER PARA SISTEMAS NO LINEALES TIPO VOLTERRA”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

Guillermo Manuel Flores Figueroa

Director:

Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo

Oaxaca de Juárez, Oaxaca a 11 de Enero de 2016



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez siendo las 13:00 horas del día 26 del mes de noviembre del 2015 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del **Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca (CIIDIR-OAXACA)** para examinar la tesis de grado titulada: "Extensión de la transformada de tiempo corto de Fourier para sistemas no lineales tipo Volterra"

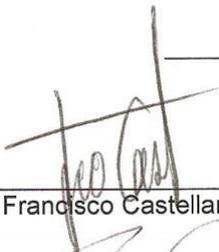
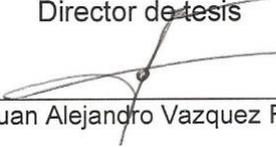
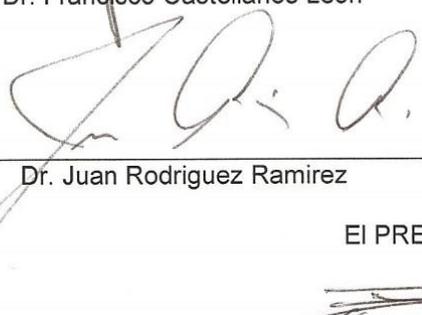
Presentado por el alumno:

Flores Apellido paterno	Figueroa materno	Guillermo Manuel nombre(s)
		Con registro: B 1 3 0 1 4 5

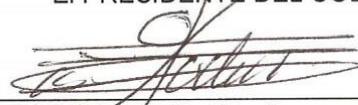
aspirante al grado de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACION DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA Director de tesis

 _____ Dr. Francisco Castellanos León	 _____ Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo	 _____ Dr. Salvador Isidro Belmonte Jiménez
 _____ Dr. Juan Rodríguez Ramírez	 _____ Dr. Alejandro Medina Santiago	

EI PRESIDENTE DEL COLEGIO



Dr. José Rodolfo Martínez y Cárdenas



CENTRO INTERDISCIPLINARIO
DE INVESTIGACION PARA EL
DESARROLLO INTEGRAL REGIONAL
C.I.I.D.I.R.
UNIDAD OAXACA
I.P.N.



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESION DE DERECHOS

En la Ciudad de Oaxaca de Juárez el día 08 del mes de diciembre del año 2015, el (la) que suscribe Guillermo Manuel Flores Figueroa, alumno (a) del Programa de **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CONSERVACIÓN Y APROVECHAMIENTO DE RECURSOS NATURALES** con número de registro B130145, adscrito al Centro Interdisciplinario de Investigación para el Desarrollo Integral Regional, Unidad Oaxaca, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo y cede los derechos del trabajo titulado: "Extensión de la transformada de tiempo corto de Fourier para sistemas no lineales tipo Volterra" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección **Calle Hornos 1003, Santa Cruz Xoxocotlán, Oaxaca**, e-mail: posgradoax@ipn.mx ó ingematicas@hotmail.com Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.


Guillermo Manuel Flores Figueroa



DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a mi mamá. A mi madre, gracias a ella soy quien soy tanto en el aspecto personal como profesional, debiéndole, no solo la vida, sino el haberme desarrollado es un hogar lleno de amor y apoyo incondicional. Gracias por tus consejos mamita. Gracias por tu valentía y ejemplo. Gracias por tu infinito amor y apoyo. Tu querías mamá que lograra este trabajo, y aquí está, es para ti. Te fuiste de esta vida, pero JAMÁS de mi corazón.

Te amo Mamá.

AGRADECIMIENTOS

Mi extenso y sincero agradecimiento a mi director de tesis, Dr. Juan Alejandro Vazquez Feijoo por su apoyo, por su credibilidad en mi para la realización del presente trabajo, por el tiempo empleado en aclarar mis dudas y sobre todo por su gran paciencia sin la cual lo efectuado en este documento, de verdad, no hubiera sido posible. Muchas Gracias Dr. Feijoo.

Al Dr. Francisco Castellanos por su apoyo, y enseñanza durante las materias que cursé con él, en las cuales aprendí muchas cosas que desconocía y que sentaron base para comprender aquello a lo que me enfrentaba en la realización de este documento.

Agradezco al Dr. Salvador Belmonte por su comprensión y apoyo en el manejo de las entregas de avance del trabajo, así como su gran calidad humana para con un servidor.

No puedo dejar de lado el reconocer y agradecer los excelentes consejos emitidos por el Dr. Pedro Montes y el Dr. Juan Rodríguez durante estos años empleados en mi curso de maestría.

ÍNDICE

Contenido

ÍNDICE.....	5
Índice de Figuras	7
RESUMEN	9
Abstract.....	¡Error! Marcador no definido.
CAPITULO I	11
1. Introducción	11
1.1.-Antecedentes	12
1.2.-Planteamiento del problema, justificación y delimitación	14
1.2.1 PLANTEAMIENTO	14
1.2.2 JUSTIFICACIÓN.....	14
1.2.3 DELIMITACION DEL PROBLEMA	14
1.3.-Desarrollo tecnológico pretendido	15
1.4.-Objetivos	15
1.4.1.-Objetivo general.....	15
1.4.2.-Objetivos específicos	15
1.5.-Actividades desarrolladas	15
CAPITULO II	16
2. Marco teórico	16
2.1.-Sistemas y señales.....	16
2.2.-Transformada de Fourier	20
2.3-Transformada de tiempo corto de Fourier (TFTC)	21
2.4.- Serie de Volterra	21
2.4.- Transformada de Fourier de múltiples grados de libertad	23
CAPITULO III	24
3. Análisis de la relación entre la función de respuesta al impulso unitario asociada a las ecuaciones lineales de n-ésimo orden con el kernel de Volterra de n-ésimo orden.	24
Kernels y funciones de respuesta a la frecuencial de los osciladores Duffing	24
La función de Respuesta a la Frecuencia	24
Sistema Oscilador Duffing	25
Función de Respuesta a la Frecuencia de orden superior	25
Ecuaciones Lineales Asociadas.....	26

3.1.-Sistema Duffing	27
Relación generalizada	28
3.2.-Sistema Hammerstein	29
3.3.-Simulación del kernel de segundo orden de un sistema oscilador Duffing	34
CAPITULO IV	41
4. TFTC multidimensional.....	41
4.1.- Programación de la TFTC para sistemas lineales	41
4.1.1.-Definición de ondícula	43
4.2.-Descripción del kernel de alto orden afectado por la ondícula	44
4.3.- Obtención de la Función de Respuesta a la Frecuencia de Tiempo Corto FRFTC para Ecuaciones lineales asociadas (ALEs) de orden “ n ”	47
4.4.-SIMULACION DE UN MODELO OSCILADOR DUFFING	50
4.4.1.-Señal a analizar	50
4.4.2.-Obteniendo la TFTC.....	60
4.4.3- Obtención de la FRFTC de alto orden	62
CAPITULO V	73
5. Trabajo experimental	73
5.1.-Descripción del sistema RLC	73
5.2.-Introducción de la no linealidad para generar un sistema Oscilador Duffing.	81
5.3.- descripción del sistema electrónico.....	82
5.4.- Introducción de la variación de los parámetros del sistema en el tiempo	83
CAPITULO VI	90
6. Conclusiones.	90
Conclusiones y recomendaciones	90
Bibliografía	92
APÉNDICE I.-Diagramas de flujo	94
APÉNDICE II.-Nomenclatura	105

Índice de Figuras

Figura.- 1 Representación de un sistema	16
Figura.- 2 <i>Ejemplo de proporcionalidad</i>	17
Figura.- 3 <i>Ejemplo de superposición</i>	18
Figura.- 4 Sistema invariante en el tiempo	19
Figura.- 5 Representación de ventanas para la TFTC	21
Figura.- 6 El oscilador Duffing	25
Figura.- 7 <i>FRF del sistema</i>	35
Figura.- 8 <i>Área de influencia del operador H1(2)</i>	36
Figura.- 9 <i>Área de influencia del operador H2</i>	37
Figura.- 10 <i>Kernel de segundo orden</i>	38
Figura.- 11 <i>Respuesta al impulso unitario de la ALE de primer orden</i>	39
Figura.- 12 <i>Impulso unitario elevado al cuadrado</i>	40
Figura.- 13 <i>Kernel de según orden por convolución</i>	41
Figura.- 14 <i>La media μ y la varianza σ permiten controlar como la ondícula cubrirá alguna región específica.</i>	43
Figura.- 15 <i>La ondícula sombrero mexicano. a) Como cambia cuando la media cambia b) cuando la varianza cambia</i>	44
Figura.- 16 <i>Sistema con parámetros constantes</i>	50
Figura.- 17 <i>Sistema con variación en frecuencia</i>	51
Figura.- 18 <i>Sistema con modificación de amortiguamiento</i>	51
Figura.- 19 <i>Respuesta del sistema con variación de parámetros</i>	52
Figura.- 20 <i>Señal de entrada al sistema</i>	54
Figura.- 21 <i>Salida del primer operador de Volterra</i>	56
Figura.- 22 <i>Ondícula "sombrero mexicano"</i>	57
Figura.- 23 <i>TFTC de la entrada al sistema</i>	58
Figura.- 24 <i>TFTC de la primer ALE</i>	59
Figura.- 25 <i>FRFTC de la primer ALE</i>	60
Figura.- 26 <i>Entrada del segundo operador de Volterra</i>	62
Figura.- 27 <i>Salida del segundo operador de Volterra</i>	63
Figura.- 28 <i>Salida de H1</i>	64
Figura.- 29 <i>FRF lineal de la segunda ALE</i>	64
Figura.- 30 <i>TFTC de la entrada de segundo orden</i>	65
Figura.- 31 <i>TFTC del ale de segundo orden</i>	66
Figura.- 32 <i>FRFTC ALE de segundo orden</i>	67
Figura.- 33 <i>Zonas de influencia de H2</i>	68
Figura.- 34 <i>Zonas de influencia de H2</i>	69
Figura.- 35 <i>Zonas de influencia de H2</i>	69
Figura.- 36 <i>Zonas de influencia de H2</i>	70
Figura.- 37 <i>Zonas de influencia de H2</i>	70
Figura.- 38 <i>Zonas de influencia de H2</i>	71

Figura.- 39 Zonas de influencia de H_2	71
Figura.- 40 Zonas de influencia de H_2	72
Figura.- 41 Circuito serie RLC.....	73
Figura.- 42 Voltaje de salida en la resistencia.....	75
Figura.- 43 Simulación del sistema y sus respectivas FRF para la determinación del error	77
Figura.- 44 Error entre la señal lineal y la misma señal no lineal.....	78
Figura.- 45 Circuito con retroalimentación añadida.....	78
Figura.- 46 Diagrama de bloques del circuito multiplicador.....	81
Figura.- 47 Diagrama de la FRF del sistema no lineal en donde se muestra la retroalimentación ...	81
Figura.- 48 Construcción física de la no linealidad del sistema.....	81
Figura.- 49 Circuito eléctrico RLC.....	82
Figura.- 50 Vista superior del circuito RLC.....	83
Figura.- 51 Entrada al sistema "x".....	84
Figura.- 52 Salida del primer operador.....	85
Figura.- 53 TFTC de la entrada al sistema.....	86
Figura.- 54 FRFTC de la Ale de primer orden.....	87
Figura.- 55 Ratio entre transformadas Salida/entrada.....	88
Figura.- 56 Entrada del segundo operador de Volterra.....	89
Figura.- 57 Salida del segundo operador de Volterra.....	89

RESUMEN

La respuesta de un Sistema continuo no lineal puede ser obtenida por la suma infinita de los llamados operadores de Volterra. Cada operador es obtenido a partir de la convolución de n-ésimo orden entre el Kernel de Volterra de n-ésimo orden y la entrada del sistema. Estos operadores también se pueden obtener a partir de las ecuaciones lineales asociadas (ALEs) que son modelos lineales de subsistemas cuyas entradas y salidas son del mismo orden n-ésimo. Cada ALE produce un particular operador n-ésimo de Volterra. Así como los modelos lineales y la respuesta de impulso unitario se puede obtener a partir de ellos. Este trabajo muestra la relación entre estas respuestas de impulso unitario y el orden correspondiente al kernel de Volterra.

Considerando como ventaja que las ecuaciones lineales asociadas (ALEs) se derivan de modelos cuyos sistemas son no lineales e invariantes en el tiempo para cada operador de Volterra, se determinara la transformada de tiempo corto de Fourier para cada una de estas ALEs logrando así una expresión general de varios grados de libertad al realizar el agrupamiento de todas las ALEs del sistema variante en el tiempo.

Palabras clave: Volterra series, Función de Respuesta a la Frecuencia FRF, Ecuaciones Lineales Asociadas ALEs, Función de respuesta al impulso unitario, Kernel de Volterra.

ABSTRACT

A continuous nonlinear system response may be obtained by an infinite sum of the so-called Volterra operators. Each operator is obtained from multidimensional convolution of n th-order between the n th-order Volterra kernel and the system input. These operators can also be obtained from the Associated Linear Equations (ALEs) that are linear models of subsystems which inputs and outputs are of the same n th-order. Each ALE produces a particular n th-Volterra operator. As linear models a unitary impulse response can be obtained from them. This work shows the relationship between this unitary impulse responses and the corresponding order Volterra kernel.

Considering the advantage that the associated linear equations (ALEs) are derived from models whose systems are non-linear and time-invariant for each operator of Volterra transform short time Fourier be determined for each of these ALEs achieving an expression generally several degrees of freedom when performing clustering of all ALEs of time variant system.

Key words: Volterra series, Frequency Response Functions FRF, Associated Linear Equations ALEs, Unitary response function, Volterra kernel.

CAPITULO I

1. Introducción

Todo aquello que nos rodea es un sistema, desde el funcionamiento de nuestros ojos, el movimiento de un brazo robótico hasta el crecimiento de un árbol. Se dice, y así es, que las matemáticas se encuentran inmersas en todo nuestro universo y, dado que todos los fenómenos físicos pueden ser expresados matemáticamente, luego entonces, todos los sistemas pueden ser representados mediante una expresión matemática. Todo aquello que se considere entrada de un sistema es llamado “señal”. El análisis de una señal brinda información sobre el comportamiento del fenómeno que la produce. Estas señales tienen como característica común, en la mayoría de los casos, que son variables en el tiempo, es decir, que con el paso del tiempo, sus parámetros varían. Sin embargo, también es posible analizar a una señal en función de su frecuencia.

Para el estudio de señales existen diferentes herramientas matemáticas, tales como la transformada de Fourier, la transformada corta de Fourier (también llamada rápida), la serie de Volterra y la transformada ondícula.

La transformada de Fourier nos permite descomponer una señal en una suma infinita de fasores. Cada uno de ellos se distingue por un coeficiente complejo asociado a una frecuencia. Así, la señal representada por estos coeficientes complejos se conoce como la señal en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, si el sistema varía en el tiempo, entonces los coeficientes de los fasores cambian, es decir, la señal en frecuencia.

La transformada de Fourier no detecta estos cambios, por ello se le añade una función “ventana” que nos permite visualizar los cambios en el tiempo. A esto se le llama Short Time Fourier Transform (STFT) o transformada de Fourier de tiempo corto (TFTC). La limitación de esta transformada depende del ancho de la ventana; de tal forma que, para una ventana muy ancha podemos ser precisos en frecuencia pero tendremos limitaciones en tiempo y viceversa.

La ondícula (wavelet) no presenta el problema anterior ya que divide a la señal en niveles de bandas energéticas, selecciona aquellas que son de interés y realiza la transformada de Fourier en ellas.

Sin embargo, a pesar de demostrar una efectividad aceptable para el análisis de señales, dichas herramientas no satisfacen la identificación cuando se trata de sistemas variantes en el tiempo y no lineales. Es por ello que el propósito del presente documento consiste en determinar una expresión matemática que permita extender la transformada corta de Fourier para sistemas de Volterra y así analizar señales para este tipo de sistemas.

1.1.-Antecedentes

Los sistemas no lineales e invariantes en el tiempo pueden ser, en ocasiones, representados en el dominio del tiempo por una serie de Volterra.(Vazquez Feijoo, Worden, & Stanway, Associated Linear Equations for Volterra operators, 2005). Cada Término de la serie de Fourier es llamado operador de Volterra. Estos operadores pueden ser obtenidos a través de modelos lineales llamados Ecuaciones Lineales Asociadas (ALEs) (Vazquez Feijoo, Worden, & Stanway , System identification using linear equations, 2004). Para la identificación de un sistema no lineal continuo e invariante en el tiempo, ahora el proceso es identificar las ALEs que producen los operadores de Volterra hasta el orden armónico que sean significativos. Las ALEs como sistemas lineales pueden identificarse por medio de cualquier método corriente de identificación de sistemas lineales ya sea en el tiempo o en el dominio de la frecuencia (Vazquez Feijoo et al., 2004).

Si una señal es función del tiempo y es integrable, puede ser descompuesta en una serie de factores con amplitudes complejas por medio de la serie o transformada de Fourier dependiendo de si la función es periódica o no (Con periodo infinito). La distribución de los coeficientes puede ser indicio de propiedades del sistema que emite una determinada señal. Por ejemplo, las frecuencias dominantes pueden ser indicio de la presencia de cierta substancia como en(Galignani, Torres, Ayala, & Brunetto, 2008), que un análisis de la señal de luz infrarroja es usada para por medio de un análisis de Fourier determinar el contenido de cafeína de una substancia.

A través de la transformada de Fourier de ruidos y vibraciones superficiales es posible detectar problemas que se manifiestan con una tendencia a la presencia más importante (mayor amplitud compleja) en ciertas frecuencias como en(Flores Serrano, Cardona, & Nebot, 2012) que la transformada sirvió para detectar fallas en la superficie de las ruedas.

La transformada de Fourier ha sido incluso usada para detectar por ultrasonido especies de murciélago en función de sus emisiones bucales(Malo de Molina, Velazco, Pacheco, & Robledo, 2012).

Sin embargo la transformada de Fourier se ve limitada cuando el sistema no es lineal y/o es variante en el tiempo.

Cuando el sistema varía en el tiempo, entonces los coeficientes complejos de los fasores involucrados en la serie de Fourier cambian, es decir, la señal en frecuencia. La transformada de Fourier no detecta estos cambios. Sin embargo, cuando el análisis se lleva a cabo mediante una “ventana” agregada a la transformada de Fourier, es posible visualizar dichos cambios en el tiempo. A esto se le llama Short Time Fourier Transform (STFT).

Por medio de la STFT se ha logrado una mejora en el reconocimiento de huellas digitales. El algoritmo calcula simultáneamente todas las propiedades intrínsecas de las huellas

digitales, tales como la máscara región de primer plano, la orientación local de la cresta y la frecuencia local de canto. (Chikkerur, Cartwright, & Govindaraju, 2007).

Se han creado modelos para la determinación de fallas eléctricas y mecánicas de los sistemas electro-mecánicos en turbinas (Nese, Kilic, & Akinci, 2012), así como la detección y localización de flujo sanguíneo cerebral para la detección de señales embólicas (en conjunto con la transformada Wavelet (TW))(Goncalves, Leiria, & Moura, 2013).

La limitación de esta transformada depende del ancho de la ventana; de tal forma que para una ventana muy ancha podemos ser precisos en frecuencia pero tendremos limitaciones en tiempo y viceversa.

Una ventaja de trabajar con series de Volterra es que, al estar relacionadas con convoluciones multidimensionales, significa que es posible usar toda la teoría de transformadas de Fourier al procesado de sistemas no lineales usando la versión de la transformada multidimensional. La no linealidad queda condensada en la señal que se convoluciona con el kernel correspondiente, y cabe considerarla como una señal multidimensional de orden k obtenida a partir de una entrada. (Montoro López, 1996).

Tomando como base la transformada de Fourier multidimensional se ha creado un método para la formación de una serie de redes neuronales para el modelado de sistemas dinámicos(Halawa, 2008) y cómo incrustar marcas de agua en el dominio de la frecuencia que sea coherente con nuestro sistema visual humano(Tsz, Xiao-Ping, & Androutsos, 2008), por mencionar algunas de sus aplicaciones.

Sin embargo, el mayor inconveniente de la teoría de Volterra está precisamente en cómo obtener los kernels correspondientes a la expansión de un determinado sistema no lineal. Los kernels de Volterra pueden ser obtenidos gracias a las Ecuaciones Lineales Asociadas (ALEs) a los diferentes órdenes armónicos de una señal. (Vazquez Feijoo, Worden, & Stanway, Associated Linear Equations for Volterra operators, 2005). Al ensamblar las respectivas transformadas de Fourier, de cada una de las ecuaciones lineales asociadas a los operadores de Volterra, se determina la transformada de Fourier multidimensional o de varios grados de libertad(Schetzen, 1989).

Lo importante de la serie de Volterra es que cada uno de los k -términos caracteriza un grado de no linealidad, y se obtiene a partir de una integral de convolución, que no es más que una operación lineal

A pesar de demostrar una efectividad aceptable para el análisis de señales, las herramientas matemáticas anteriores no satisfacen la identificación cuando se trata de sistemas variantes en el tiempo no lineal. Se tiene como objetivo obtener una expresión matemática para la transformada corta de Fourier, que permita realizar el análisis de

sistemas no lineales, continuos y variantes en el tiempo, es decir, sistemas No lineales de Volterra.

1.2.-Planteamiento del problema, justificación y delimitación

1.2.1 PLANTEAMIENTO

No existe una expresión matemática equivalente a la transformada de tiempo corto de Fourier de varios grados de libertad para sistemas no lineales, que nos permita detectar cambios en las características del sistema y además nos permita detectar los cambios de las componentes armónicas de la señal en el tiempo.

1.2.2 JUSTIFICACIÓN

Estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen y el comportamiento de un sistema solo es lineal bajo rangos pequeños de operación y cumpliendo con ciertas restricciones.

Además, Todo aquello que nos rodea es variable con el tiempo. Así, todos los sistemas son también variantes en el tiempo.

Cuando un sistema lineal varía en el tiempo, existen herramientas que permiten cuantificar los cambios que éste sufre. Existen también herramientas que permiten describir el comportamiento de los sistemas no lineales invariantes en el tiempo, aunque estas herramientas no tienen una aplicación universal. Lo que no existe es una herramienta que permita el análisis de sistemas no lineales y variantes en el tiempo.

1.2.3 DELIMITACION DEL PROBLEMA

Para sistemas No lineales y NO variantes en el tiempo, la serie de VOLTERRA es una herramienta adecuada a utilizar para su estudio. Pero para sistemas NO lineales y variantes en el tiempo la información y/o métodos de reconocimiento son escasos.

Es por ello que limitaremos el rango de estudio a sistemas no lineales continuos y variantes en el tiempo que puedan ser representados mediante modelos de Volterra.

1.3.-Desarrollo tecnológico pretendido

A través de la serie de Volterra y las ecuaciones lineales asociadas, es posible extender la aplicación de la transformada de tiempo corto de Fourier a sistemas con no linealidades continuas y variantes en el tiempo.

1.4.-Objetivos

1.4.1.-Objetivo general

Encontrar una expresión matemática que nos permita extender la transformada de tiempo corto de Fourier (STFT) a sistemas no lineales, continuos y variantes en el tiempo.

1.4.2.-Objetivos específicos

- Demostrar que es posible obtener una STFT para cada una de las ecuaciones lineales asociadas de sistemas no lineales variantes en el tiempo.
- A través de la STFT de cada una de las ecuaciones lineales asociadas obtener una expresión para una STFT multidimensional.
- Encontrar una expresión global que nos permita determinar, de manera objetiva, la STFT para toda la serie de Volterra.
- Comprobar experimentalmente los resultados obtenidos

1.5.-Actividades desarrolladas

Los sistemas a considerar son aquellos que contienen no linealidades continuas variantes en el tiempo. Se utilizarán ecuaciones lineales asociadas (ALEs) aprovechando que éstas modelan sistemas no lineales continuos e invariantes en el tiempo por medio de ecuaciones lineales para cada operador de Volterra. De la misma manera que la transformada de Fourier de cada una de las ALEs en conjunto producen la transformada de Fourier de varios grados de libertad, se espera proceder de forma semejante, obteniendo primero la transformada de Fourier de tiempo corto (STFT), y así ver la posibilidad de obtener una STFT de varios grados de libertad al realizar el ensamble de todas las ALEs del sistema variante en el tiempo.

CAPITULO II

2. Marco teórico

2.1.-Sistemas y señales

El estudio de la naturaleza y sus fenómenos, así como la comprensión de las situaciones que se presentan bajo condiciones semicontroladas (ya que siempre hay cierto nivel de incertidumbre), han sido motivos de estudio durante mucho tiempo.

Diversas herramientas se han instrumentado para dicho estudio, y conforme se ha avanzado en el campo del conocimiento, estos instrumentos también han ido evolucionando, de manera tal que los análisis hechos a los diversos sistemas cada vez son más complejos, completos, y por qué no decirlo, más interesantes.

Se puede definir a un sistema como una parte aislada del universo formado por un conjunto de elementos que operan entre sí para lograr un determinado objetivo. Un sistema presenta entradas y salidas, las cuales pasan por un proceso de transformación (o no). Estos sistemas pueden dividirse, en lazo abierto y lazo cerrado. Un sistema de lazo abierto es aquel que no presenta retroalimentación alguna. La retroalimentación permite reintroducir salidas nuevamente al sistema y como consecuencia pueden ser controladas. Un sistema de lazo cerrado es aquel que presenta retroalimentación.

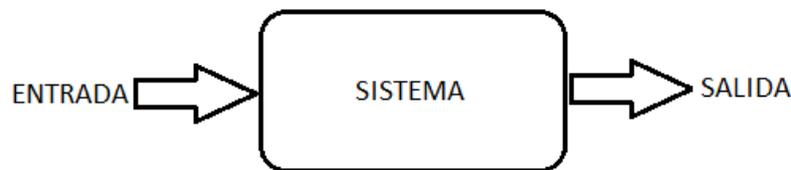


Figura.- 1 Representación de un sistema

Los sistemas tienen subdivisiones dependiendo de las características que presente, así, pueden ser de lazo abierto o de lazo cerrado, variantes e invariantes en el tiempo, lineales y no lineales, etc.

En la entrada de un sistema, podemos introducir SEÑALES, las cuales podemos representarlas mediante formas diversas. El análisis de una señal brinda información sobre el comportamiento del fenómeno que la produce. La representación más adecuada para una señal, ha sido la onda senoide. De esta manera es posible analizar a una señal en función del tiempo, aunque también es posible hacerlo en el dominio de la frecuencia.

Los sistemas lineales, a diferencia de los no lineales, son más fáciles de identificar, ya que se rigen por un conjunto de propiedades que facilitan dicho estudio.

Sistemas lineales

Un sistema es lineal cuando cumple dos condiciones importantes: proporcionalidad y superposición. Se representa a través de una ecuación diferencial de primer orden como se muestra a continuación:

$$\ddot{y} + C_1\dot{y} + C_2y = C_3x$$

A continuación se muestran las propiedades que un sistema debe cumplir para ser considerado lineal.

PROPORCIONALIDAD.- Si para una entrada x_1 corresponde una salida y_1 , entonces para la entrada x_2 corresponde una salida y_2 .

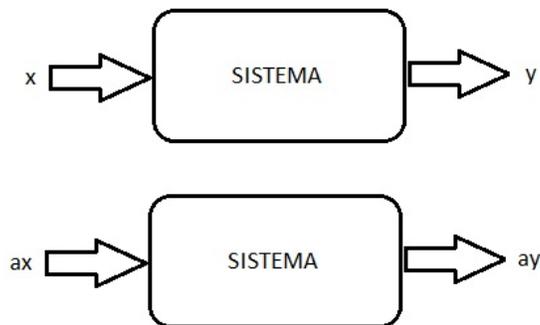


Figura.- 2 Ejemplo de proporcionalidad

SUPERPOSICIÓN: Si la entrada es $x_1 + x_2$ la salida debe ser igual a $y_1 + y_2$

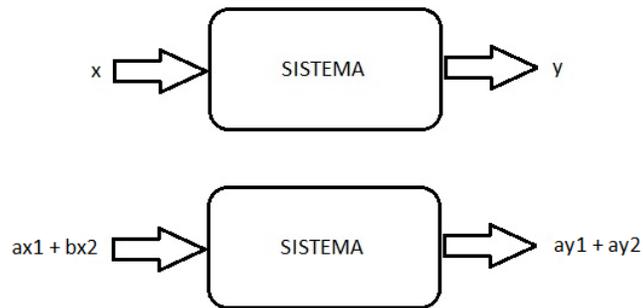


Figura.- 3 Ejemplo de superposición

Dado un modelo:

$$\ddot{y} + C_1\dot{y} + C_2y = C_3x$$

$$x = x_1 + x_2; y = y_1 + y_2$$

Sustituyendo :

$$(y_1 + y_2) + C_1(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + C_2(y_1 + y_2) = C_3(x_1 + x_2)$$

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 + C_1\dot{y}_1 + C_1\dot{y}_2 + C_2y_1 + C_2y_2 = C_3x_1 + C_3x_2$$

Asociando:

$$(\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + C_2y_1) + (\ddot{y}_2 + C_1\dot{y}_2 + C_2y_2) = C_3x_1 + C_3x_2$$

$$\ddot{y}_1 + C_1\dot{y}_1 + C_2y_1 = C_3x_1$$

$$\ddot{y}_2 + C_1\dot{y}_2 + C_2y_2 = C_3x_2$$

Se observa que se cumple que la suma de las entradas es igual a la suma de las salidas.

Sistemas no lineales

Los sistemas no lineales representan sistemas cuyo comportamiento no es expresable como la suma de los comportamientos de sus descriptores. Más formalmente, un sistema físico, matemático o de otro tipo es no lineal cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento son no lineales. En particular, el comportamiento de sistemas no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal.

La linealidad de un sistema permite hacer ciertas suposiciones matemáticas y aproximaciones, permitiendo un cálculo más sencillo de los resultados. Ya que los sistemas no lineales no son iguales a la suma de sus partes, usualmente son difíciles (o imposibles) de modelar, y sus comportamientos con respecto a una variable dada (por ejemplo, el tiempo) es extremadamente difícil de predecir.

Sistemas variantes e invariantes en el tiempo

En nuestro mundo, y conforme el tiempo transcurre, todo sufre modificaciones en mayor o menor grado. Un árbol crece a lo largo de su vida, hasta que llega a un punto en el cual comienza a envejecer. Nosotros mismos cumplimos con dicho ciclo.

Así entonces, todo aquello que nos rodea también cumple cierto ciclo, aunque en algunos casos este ciclo es mucho más notorio que en otros. Se puede decir que todos los sistemas en general son variantes en el tiempo.

Sin embargo, y dado que por motivos de conveniencia o por establecimiento, dicha variación no es tan notoria, es insignificante o con valores tan mínimos para el sistema, como en un edificio (con el mantenimiento adecuado por supuesto), entonces el sistema se considera invariante en el tiempo. Un sistema es invariante con el tiempo si su comportamiento y sus características son fijas. Esto significa que los parámetros del sistema no van cambiando a través del tiempo y que por lo tanto, una misma entrada nos dará el mismo resultado en cualquier momento (ya sea ahora o después).

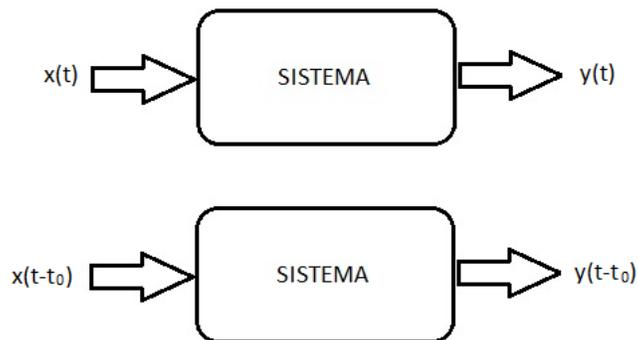


Figura.- 4 Sistema invariante en el tiempo

Cada uno de estos sistemas, es decir, de acuerdo a sus características, pueden ser estudiados mediante diversas técnicas, modelos matemáticos y teorías que nos ayuden a comprenderlos, determinar información y/o poder controlarlos.

Entre las herramientas matemáticas más utilizadas para este análisis, se cuenta con la serie de Fourier, la transformada de Fourier así como la transformada corta, la serie de Volterra y la transformada wavelet también llamada ondícula.

2.2.-Transformada de Fourier

Es una sumatoria infinita de fasores con coeficientes complejos, asociado cada uno de ellos, a una respectiva frecuencia. Es básicamente, el espectro de frecuencias de una función o señal.

La expresión de la transformada de Fourier es la siguiente:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Esta relaciona a una función que se encuentra en el dominio del tiempo con el espectro de frecuencias que componen a dicha función. El espectro de frecuencias muestra los picos de todas las frecuencias involucradas en una en la función conforme transcurre el tiempo.

Cuando el sistema es variante en el tiempo los coeficientes cambia, es decir, la señal en frecuencia.

Permite el ahorro de datos, mediante un análisis frecuencial, para la identificación de armónicos indeseables para el buen funcionamiento de un sistema. Sin embargo, una de sus desventajas es que no detecta los cambios mencionados anteriormente en los coeficientes de cada fasor asociado.

La transformada de Fourier se utiliza para pasar al dominio de la frecuencia una señal para así obtener información que no es evidente en el dominio temporal. Por ejemplo, es más fácil saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio de la frecuencia.

También sirve para resolver ecuaciones diferenciales con mayor facilidad y, por consiguiente, se usa para el diseño de controladores clásicos de sistemas realimentados si conocemos la densidad espectral de un sistema y la entrada podemos conocer la densidad espectral de la salida. Esto es muy útil para el diseño de filtros de radiotransistores.

La transformada de Fourier también se utiliza en el ámbito del tratamiento digital de imágenes, como por ejemplo para mejorar o definir más ciertas zonas de una imagen fotográfica o tomada con una computadora.

2.3-Transformada de tiempo corto de Fourier (TFTC)

Es prácticamente la transformada de Fourier pero, la función a transformar, se multiplica por una función “ventana” cuyo periodo es muy pequeño. Mediante dicha ventana agregada es posible visualizar los cambios en el tiempo.

Su expresión es la siguiente:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \omega(t - \tau) e^{-i\omega t} dt$$

Mediante los parámetros de la ventana es posible diferenciar en lo siguiente: con una ventana ANCHA se puede tener una mejor precisión en frecuencia pero un decremento en el aspecto temporal y se presenta la situación inversa si la ventana es muy angosta.

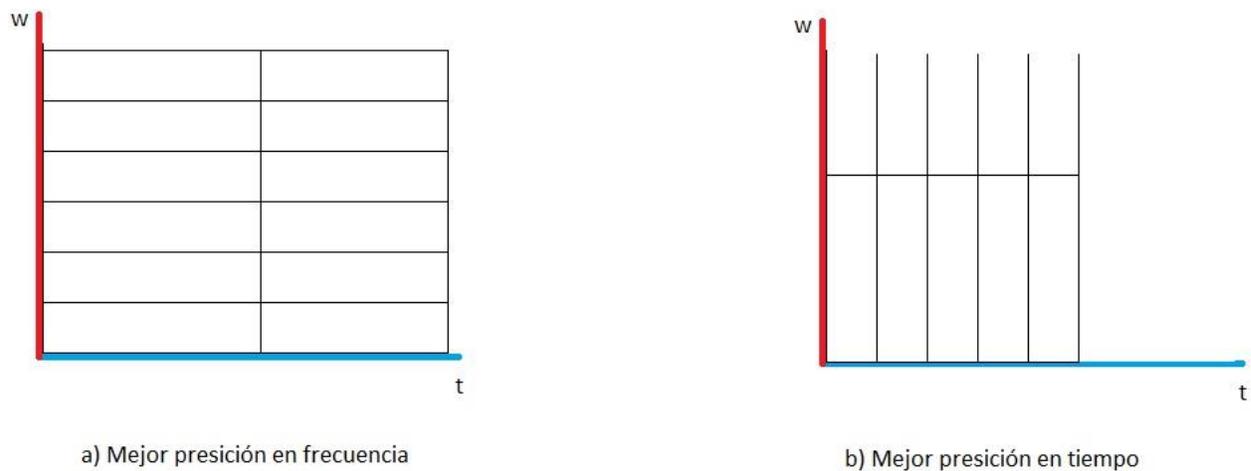


Figura.- 5 Representación de ventanas para la TFTC

2.4.- Serie de Volterra

La serie de Volterra es la sumatoria infinita de cada uno de los operadores (**H**) que representan la transformación de una señal y que a su vez son salidas de cada una de las ecuaciones lineales asociadas (ALES).

$$y(t) = \sum_0^{\infty} y_i$$

La serie, dependiendo de las características del sistema a analizar, puede quedar determinada a partir de tres modelos, utilizados para la representación de sistemas: Hammerstein, Duffing o Wiener. El sistema Duffing, el cual será motivo de estudio en este trabajo, es el único que cuenta con retroalimentación y con el cual se trabaja en este documento. Su expresión es la siguiente:

$$x(t) = \sum_{j=0}^m D^j (a_j y) + \sum_{k=0}^n b_k y^k$$

2.4.1.- Ecuaciones Lineales Asociadas (ALES)

Es posible obtener la salida de orden n de cada operador $y_j(t)$ por los modelos lineales conocidos como ecuaciones lineales asociadas (ALEs). Cada ALE toma una señal de orden n en la entrada para producir otra señal del mismo orden armónico en la salida. Para los osciladores Duffing la entrada está compuesta de todos los productos de operadores de orden inferior los cuales producen la correspondiente salida de orden n .

La manera más fácil de ilustrar esto es con un ejemplo de un oscilador Duffing de Segundo orden como se muestra a continuación:

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By + C_3y^2 = C_4x$$

A partir de este modelo, es posible determinar, mediante el número de operadores deseados para la serie de Volterra, a las ALEs de determinado orden, por ejemplo, a continuación se muestran las tres primeras ALEs del modelo:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + A\dot{y}_1 + By_1 &= C_4x \\ \ddot{y}_2 + A\dot{y}_2 + By_2 &= -C_3y_1^2 \\ \ddot{y}_3 + A\dot{y}_3 + By_3 &= -2C_3y_1y_2 \end{aligned}$$

Las ALES, que también pueden ser llamadas “salidas de los operadores de Volterra”, son los modelos cuyas salidas corresponden a cada uno de los operadores de Volterra, y que de manera natural, por atender a un orden armónico específico, son lineales. Cada una de estas ALES es obtenida a partir del Operador (modelo del sistema) y dependerá del tipo de entrada que a éste corresponda.

Cada operador (**H**), también llamado KERNEL, nunca cambia y su salida y_i depende de la señal de entrada al operador. Estos son obtenidos a partir de una convolución.

$$H(\omega) = \int h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

Gracias a la identificación de la función de respuesta a la frecuencia y las ALES, es posible obtener los modelos analíticos de los diferentes órdenes armónicos expresados en el tiempo.

La función de transferencia de cada ALE, que no es más que la relación de la entrada y la salida para un determinado orden armónico específico para cada ALE, permite observar el aporte de cada ecuación lineal asociada a la función de transferencia del operador, es decir, el sistema.

El operador de Volterra de orden n es una función multi - lineal de señales de entrada. De hecho, los sistemas de tipo Duffing y Hammerstein poseen una relación lineal entre el orden n la respuesta del operador de Volterra y las entradas compuestas de una combinación de orden inferior

Los operadores de Volterra son ecuaciones lineales que mapean el operador de orden n de una excitación del mismo orden producido por una combinación de operadores de orden inferior. Este conjunto de ecuaciones se conoce las ecuaciones lineales asociadas (ALE). Estas ALEs se pueden utilizar en la simulación, control y como una herramienta analítica para la serie de Volterra de sistemas no lineales. La principal desventaja es que la teoría hasta hoy se ha limitado a sistemas no lineales.

2.4.- Transformada de Fourier de múltiples grados de libertad

La transformada corta de Fourier opera para funciones lineales. Considerando como ventaja que las ecuaciones lineales asociadas (ALEs) se derivan de modelos cuyos sistemas son no lineales e invariantes en el tiempo para cada operador de Volterra, se determinara la transformada de tiempo corto de Fourier para cada una de estas ALEs logrando así una expresión general de varios grados de libertad al realizar el agrupamiento de todas las ALEs del sistema variante en el tiempo.

Cabe mencionar que dicha expresión cuenta con un numero de ventanas igual al orden en el cual se está realizando la misma transformada de tiempo corto; es decir, una función ventana que afecte a cada una de las aportaciones realizadas por cada una de las ALES de forma lineal.

CAPITULO III

3. Análisis de la relación entre la función de respuesta al impulso unitario asociada a las ecuaciones lineales de n-ésimo orden con el kernel de Volterra de n-ésimo orden.

Los modelos de sistemas de Volterra(Babatunde, Pearson, Francis, & Doyle, 2002) son aquellos de los cuales se puede obtener una serie convergente de Volterra(Schetzen, 1989). En función de la naturaleza de la Fuente no lineal, se pueden clasificar en Hammerstein, oscilador Duffing y Wiener. En general este tipo de modelos se utilizan para sistemas no lineales continuos. Se han utilizado para la identificación, control o de una manera similar cuando se analiza una respuesta del sistema lineal en el dominio de la frecuencia utilizando su función de respuesta a la frecuencia (FRF), las respuestas de los operadores de orden superior pueden ser analizadas por las funciones de respuesta de frecuencia de alto orden (para HFRF)(Bin , Billings , Zi-Qiang, & Tomlinson, 2009).

Por definición(Schetzen, 1989), de la FRF se obtiene de la función de respuesta al impulso unitario. De la misma manera, los HFRFs se obtienen de los Kernel de Volterra que son la respuesta de impulsos n-ésimos unitarios en diferentes momentos.

La salida de un operador n-ésimo de Volterra puede obtenerse de las ecuaciones lineales asociadas (ALEs) (Vazquez Feijoo, Worden, & Stanway, Associated Linear Equations for Volterra operators, 2005). Aunque las ALEs trabajan con una entrada de orden n para producir una salida de orden n, en realidad son modelos lineales como se ha demostrado en (Vazquez Feijoo, Worden, & Stanway , System identification using linear equations, 2004). Esto significa que de cada ALE es posible obtener una FRF lineal de n-ésimo orden. Esto implica que debe haber una respuesta al impulso unitario de n-ésimo orden (al menos en teoría) para la correspondiente FRF. En este trabajo se ha obtenido ya la relación entre las ALEs y su respuesta al impulso unitario de orden n con el kernel de orden n como resultado como se muestra a continuación.

Kernels y funciones de respuesta a la frecuencial de los osciladores Duffing

La función de Respuesta a la Frecuencia

La salida de cualquier Sistema lineal puede ser obtenida como una convolución de la forma

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \quad (3.1)$$

Donde $h(\tau)$ es la función de respuesta al impulso unitario y $x(t)$ como entrada del sistema. La definición formal de la función de respuesta a la frecuencia (FRF) es:

$$H(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.2)$$

Por lo tanto, la FRF es la transformada de Fourier de la función de respuesta al impulso unitario.

Sistema Oscilador Duffing

De manera general, un Sistema oscilador Duffing puede ser descrito como:

$$x(t) = \sum_{j=0}^m D^j (a_j y) + \sum_{k=0}^n b_k y^k \quad (3.3)$$

Donde $x(t)$ es la entrada del sistema y $y(t)$ la salida. D^j es el operador derivativo de orden m . En el diagrama (Figura 1) puede observarse que el oscilador Duffing es de hecho un Sistema lineal con una retroalimentación polinomial de la salida del sistema.

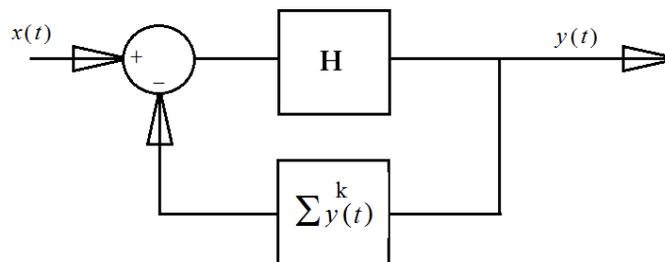


Figura.- 6 El oscilador Duffing

Este es un Sistema no lineal que produce armónicos en la salida del sistema debido a las frecuencias de entrada.

Función de Respuesta a la Frecuencia de orden superior

La salida de un oscilador Duffing puede ser obtenida en la forma:

$$y(t) = \sum_0^{\infty} y_i(t) \quad (3.4)$$

Esta forma de expresar la salida del Sistema es llamada **Serie de Volterra**. Cada $y_i(t)$ es la salida de un operador armónico de orden n . El Sistema completo (un operador en sí) se cambia por una serie de operadores de un particular orden armónico n . De manera similar en que una función de respuesta al impulso unitario se define para un Sistema lineal, para cada operador puede ser definido un kernel de orden n de tal forma que la salida de la serie de Volterra puede ser obtenida como:

$$y_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_j) x(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3, \dots, t - \tau_j) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_j \quad (3.5)$$

Un kernel $h_j(\dots)$ es el equivalente de la función de respuesta al impulso unitario para sistemas lineales. Esto es, la respuesta del Sistema cuando se aplican n impulsos unitarios.

La transformada multidimensional de Fourier del kernel de orden n proporciona la definición de la Función de Respuesta a la Frecuencia de alto orden (HFRF) como se muestra a continuación:

$$H_j(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_j) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_j) e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_2\tau_2} e^{-i\omega_3\tau_3} \dots e^{-i\omega_j\tau_j} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_j \quad (3.6)$$

No todas las HFRFs son simétricas respecto a sus argumentos (frecuencias). La HFRF se simetriza promediando todas las posibles permutaciones.

Ecuaciones Lineales Asociadas

Es posible obtener la salida de orden n de cada operador $y_j(t)$ por los modelos lineales conocidos como ecuaciones lineales asociadas (ALEs). Cada ALE toma una señal de orden n en la entrada para producir otra señal del mismo orden armónico en la salida. Para los osciladores Duffing la entrada está compuesta de todos los productos de operadores de orden inferior los cuales producen la correspondiente salida de orden n .

La manera más fácil de ilustrar esto es con un ejemplo de un oscilador Duffing de Segundo orden como se muestra a continuación:

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By + C_3y^2 = C_4x \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.4) en (3.7) y separando para cada orden armónico, tenemos:

$$\ddot{y}_1 + A\dot{y}_1 + By_1 = C_4x \quad (3.8)$$

$$\ddot{y}_2 + A\dot{y}_2 + By_2 = -C_3y_1^2 \quad (3.9)$$

$$\ddot{y}_3 + A\dot{y}_3 + By_3 = -2C_3y_1y_2 \quad (3.10)$$

Debido a que cada ecuación es un modelo lineal, de acuerdo con (3.2), cada ALE posee una FRF que puede ser calculada a partir de una función de respuesta al impulso unitario:

$$H_{1(j)}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(j)}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.11)$$

El subíndice “1” indica solamente que la FRF es para un modelo lineal, el subíndice “j” entre paréntesis indica el orden del armónico de entrada-salida.

La relación entre el Kernel de Volterra (3.5) y la función de respuesta al impulso unitario correspondiente a las ALEs de orden n (3.11) es parte del objetivo del presente trabajo.

Obtención del Kernel de orden n a partir de la respuesta al impulso unitario.

(Caso del segundo orden armónico)

3.1.-Sistema Duffing

Es posible obtener la salida de orden n de cada operador de Volterra $y_j(t)$ por los modelos lineales conocidos como ecuaciones lineales asociadas (ALEs). Cada ALE representa a una señal de orden n (salida).

La salida del operador de Segundo orden puede ser expresada en función de sus operadores como sigue,

$$y_2(t) = \mathbf{H}_2[\mathbf{x}(t)]$$

La salida del Segundo orden de acuerdo con (3.5) es:

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x_a(t - \tau_1) x_b(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.12)$$

Donde $x_j(t)$ son componentes armónicos de la señal de entrada $x(t)$ de modo que:

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_1(t-\tau_1)} e^{i\omega_2(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.13)$$

Extrayendo las constantes de la integral tenemos:

$$y_2(t) = e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.14)$$

La ecuación anterior muestra una transformada de Fourier de Segundo orden y, por lo tanto, la HFRF es de Segundo orden (Bin, Billings, Zi-Qiang, & Tomlinson, 2009):

$$y_2(t) = e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} H_2(\omega_1, \omega_2) \quad (3.15)$$

Considerando (3.9), y aplicando la prueba armónica (Worden, Manson, & Tomlinson, 1997):

$$y_2(t) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) * H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en (3.15) obtenemos,

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) * H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) \quad (3.17)$$

Usando (3.14) y, escribiendo las FRFs en función de la respuesta al impulso unitario:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_2) e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_2 \quad (3.18)$$

Derivando (3.18) respecto de los retrasos τ_1 y τ_2 :

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) h_1(\tau_1 - \tau) h_1(\tau_2 - \tau) d\tau \quad (3.19)$$

Esta última ecuación muestra la relación entre el kernel de Segundo orden y la función de respuesta al impulso unitario de segundo orden. Resulta ser la convolución de la función de respuesta al impulso unitario con los retrasos de las componentes de entrada.

Relación generalizada

En este momento es conveniente recordar que para los osciladores Duffing las entradas de alto orden armónico de las ALEs, son productos de bajo orden de los operadores de las salidas, por ejemplo, para Segundo y tercer orden las ALEs son:

y_1^2 (ALE de entrada de Segundo orden)

y_1^3 e $y_1 y_2$ (ALE de entrada de tercer orden)

Para el cuarto orden se tienen tres términos y así sucesivamente. Se puede considerar que para el Segundo orden hay dos operadores, cada uno, para cada término de segundo orden de entrada. Por lo tanto, existen también dos diferentes funciones de respuesta al impulso unitario, una para cada término. Esto es cierto para los operadores de orden superior, por ejemplo el cuarto orden puede ser dividido en tres operadores. Esta división no tiene problema ya que todos son operadores lineales trabajando en el orden armónico n . Todas las señales de salida de orden superior contienen la respuesta de y_1^n de lo que se puede determinar (3.19) como:

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(n)}(\tau) h_1(\tau_1 - \tau) h_1(\tau_2 - \tau) h_1(\tau_3 - \tau) \dots h_1(\tau_n - \tau) d\tau \quad (3.20)$$

Se debe observar que no importa el orden del Kernel ya que es necesaria únicamente una convolución de la respuesta al impulso unitario correspondiente al n -ésimo orden de las ALEs. La fórmula general debe de considerar todas las posibles combinaciones de los kernel de bajo orden que deben ser considerados en la convolución de orden n . La expresión general es:

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(n)}(\tau) \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{i_1=1}^{F(\frac{n}{p})} \sum_{i_2=1}^{F(\frac{n-i_1}{p-1})} \sum_{i_3=1}^{F(\frac{n-i_1-i_2}{p-2})} \dots \sum_{i_s=i_{s-1}}^{F(\frac{n-i_1-i_2-\dots-i_{s-1}}{2})} h_{i_1}(\tau_1 - \tau, \tau_2 - \tau, \dots, \tau_{i_1} - \tau) h_{i_2}(\tau_{i_1+1} - \tau, \tau_{i_1+2} - \tau, \dots, \tau_{i_1+i_2} - \tau) \dots h_{n-\sum_{k=1}^{p-1} i_k}(\dots, \tau_n - \tau) d\tau \quad (3.21)$$

donde p es el número de factores (kernels), F es la función "floor". Es importante considerar que el denominador de la parte superior de la sumatoria debe de tener por lo menos un valor igual a 2.

3.2.-Sistema Hammerstein

Si:

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} y_2(t_1, t_2) \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.22)$$

Y considerando que $y_2(t) = y_2(t, t)$

$$y_2(\tau_1, \tau_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{j\omega_1(t-\tau_1)} e^{j\omega_2(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.23)$$

$$y_2(\tau_1, \tau_2) = e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.24)$$

De lo anterior podemos expresar que:

$$y_2(\tau_1, \tau_2) = H_2(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (3.25)$$

Si se tiene que:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{j(\omega_1 + \omega_2)(t-\tau)} d\tau \quad (3.26)$$

Entonces:

$$y_2(t) = e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{-j(\omega_1 + \omega_2)\tau} d\tau \quad (3.27)$$

Y por lo tanto:

$$y_2(t) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (3.28)$$

Considerando (3.25) por medio de (3.22)

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} d\tau_1 d\tau_2$$

$$y_2(t) = e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \iint_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Sustituyendo en (3.28)

$$e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} \iint_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) d\tau_1 d\tau_2 = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t}$$

Eliminando los términos exponenciales, obtenemos:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega_1, \omega_2) \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) d\tau_1 d\tau_2 = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.29)$$

Extrayendo:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) d\tau_1 d\tau_2 = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.30)$$

Y por lo tanto:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) \quad (3.31)$$

$$\text{Si: } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$yh_1(\tau) = \delta(\tau)$$

Entonces:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.32)$$

$$y(t) = e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Siendo entonces:

$$e^{-j\omega\tau} = H_{\delta}(\omega) \quad (3.33)$$

Si:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2)H_1(\omega_1)H_1(\omega_2) \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.33) en (3.34), la ecuación (3.31) ahora será:

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2)H_{\delta}(\omega_1)H_{\delta}(\omega_2) \quad (3.35)$$

Reescribiendo en función de respuestas a impulsos unitarios y la parte conveniente de la igualdad (3.32) tenemos que:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{-j(\omega_1 + \omega_2)\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1) e^{-j\omega_1\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_2) e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_2 \quad (3.36)$$

Reescribiendo:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_a, \tau_b) e^{-j(\omega_1\tau_a + \omega_2\tau_b)} d\tau_a d\tau_b \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{-j(\omega_1 + \omega_2)\tau} d\tau \delta(\tau_1) e^{-j\omega_1\tau_1} d\tau_1 \delta(\tau_2) e^{-j\omega_2\tau_2} d\tau_2 \end{aligned}$$

Y considerando que:

$$\tau_a = \tau_1 + \tau$$

$$\tau_b = \tau_2 + \tau$$

Entonces:

$$\tau_1 = \tau_a - \tau \vee \tau_2 = \tau_b - \tau$$

Por lo tanto:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_a, \tau_b) d\tau_a d\tau_b = \iiint_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) \delta(\tau_a - \tau) \delta(\tau_b - \tau) d\tau d\tau_a d\tau_b$$

Derivando con respecto a τ_a y τ_b

$$h_2(\tau_a, \tau_b) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) \delta(\tau_a - \tau) \delta(\tau_b - \tau) d\tau \quad (3.37)$$

Entonces, si $\tau_a \neq \tau_b$:

$$h_2(\tau_a, \tau_b) = 0$$

De forma general, si $\tau_a = \tau_b$, tenemos para cualquier orden:

$$h_n(\tau_a, \tau_b, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(n)}(\tau) \delta(\tau_a - \tau) \delta(\tau_b - \tau) \dots \delta(\tau_n - \tau) d\tau \quad (3.38)$$

Considerando que para órdenes superiores a dos el kernel de orden n puede ser función de otros kernels de orden inferior, se tiene

$$\eta_n(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}) = \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_n!} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(n)(a_{n+1}, b_{n+1}, \tau) \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{i_1=1}^{F\binom{n}{p}} \sum_{i_2=1}^{F\binom{n-i_1}{p-1}} \sum_{i_3=1}^{F\binom{n-i_1-i_2}{p-2}} \dots \sum_{i_s=i_{s-1}}^{F\binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{s-1}}{2}} \eta_{i_1}(a_1, a_2, \dots, a_{i_1+1}, b_1, b_2, \dots, b_{i_1+1}, \tau - \tau_1, \tau - \tau_2, \dots, \tau - \tau_{i_1}) h_{i_3}(\tau - \tau_{i_2+i_1+1}, \tau - \tau_{i_2+i_1+2}, \dots, \tau - \tau_{i_1+i_2+i_3}) \dots \eta_{n-\sum_{k=1}^{p-1} i_k}(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau - \tau_1, -\tau, \dots, \tau - \tau_n) d\tau \quad (3.39)$$

3.3.-Simulación del kernel de segundo orden de un sistema oscilador Duffing.

Dado un modelo Duffing de la forma

$$\ddot{y} + 2d\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y + A_3 y^2 = A_1 x \quad (3.40)$$

Se realiza la correspondiente separación de órdenes, es decir, determinar las ALES correspondientes. Las ales que nos interesan son las primeras dos. De esta forma tenemos que:

$$\ddot{y}_1 + 2d\omega_n \dot{y}_1 + \omega_n^2 y_1 = A_1 x \quad (3.41)$$

$$\ddot{y}_2 + 2d\dot{\omega}_n \dot{y}_2 + \omega_n^2 y_2 = -A_3 y^2 \quad (3.42)$$

Y a partir de cada una de las ALES anteriores, es posible determinar, mediante la prueba armónica, la correspondiente función de respuesta a la frecuencia (FRF) tal y como se muestra:

$$H_1(\omega) = \frac{A_1}{-\omega^2 + 2d\omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (3.43)$$

$$H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{-A_3}{-(\omega_1 + \omega_2)^2 + 2d\omega_n(\omega_1 + \omega_2) + \omega_n^2} \quad (3.44)$$

Recordando, como se mencionó en ecuación (3.2), la FRF es la transformada de Fourier de la función de respuesta al impulso unitario.

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

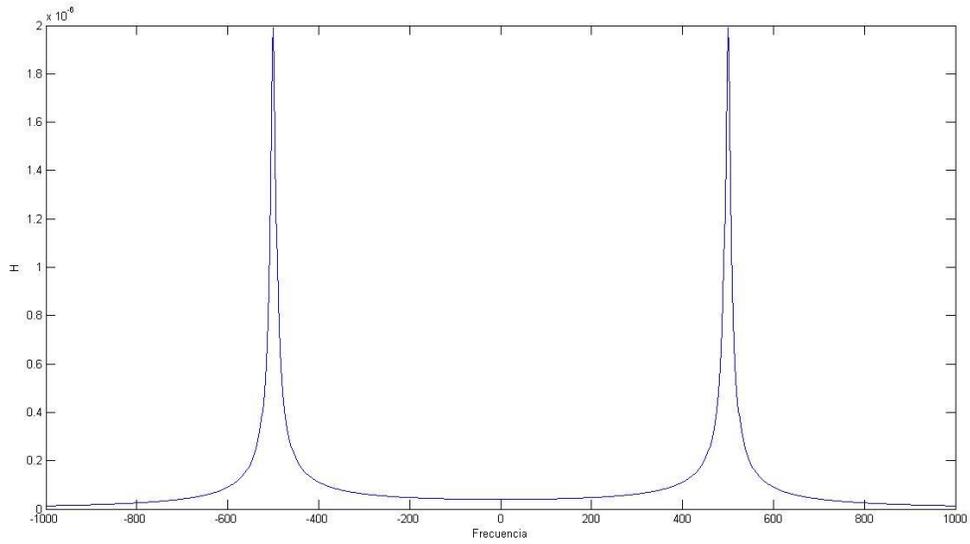


Figura.- 7 FRF del sistema

Y

$$H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)\tau} d\tau$$

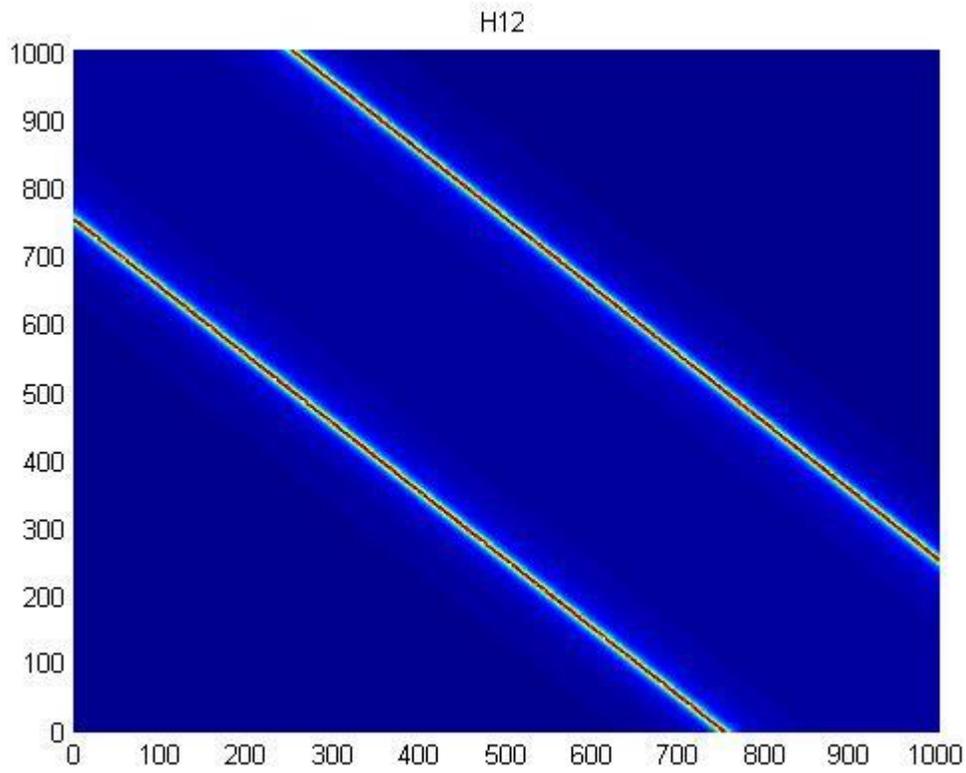


Figura.- 8 Área de influencia del operador $H_{1(2)}$

Y como se mencionó en (3.17)

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) * H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)$$

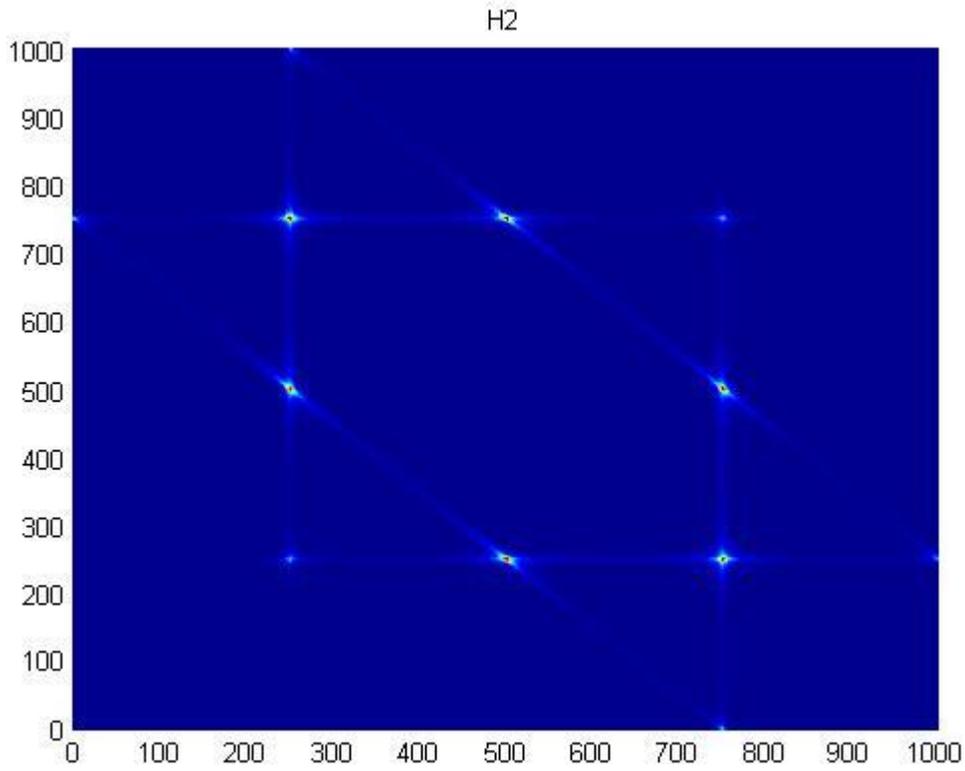


Figura.- 9 Área de influencia del operador H_2

De tal forma que:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) h_1(\tau_1 - \tau) h_1(\tau_2 - \tau) d\tau$$

La grafica de h_2 es:

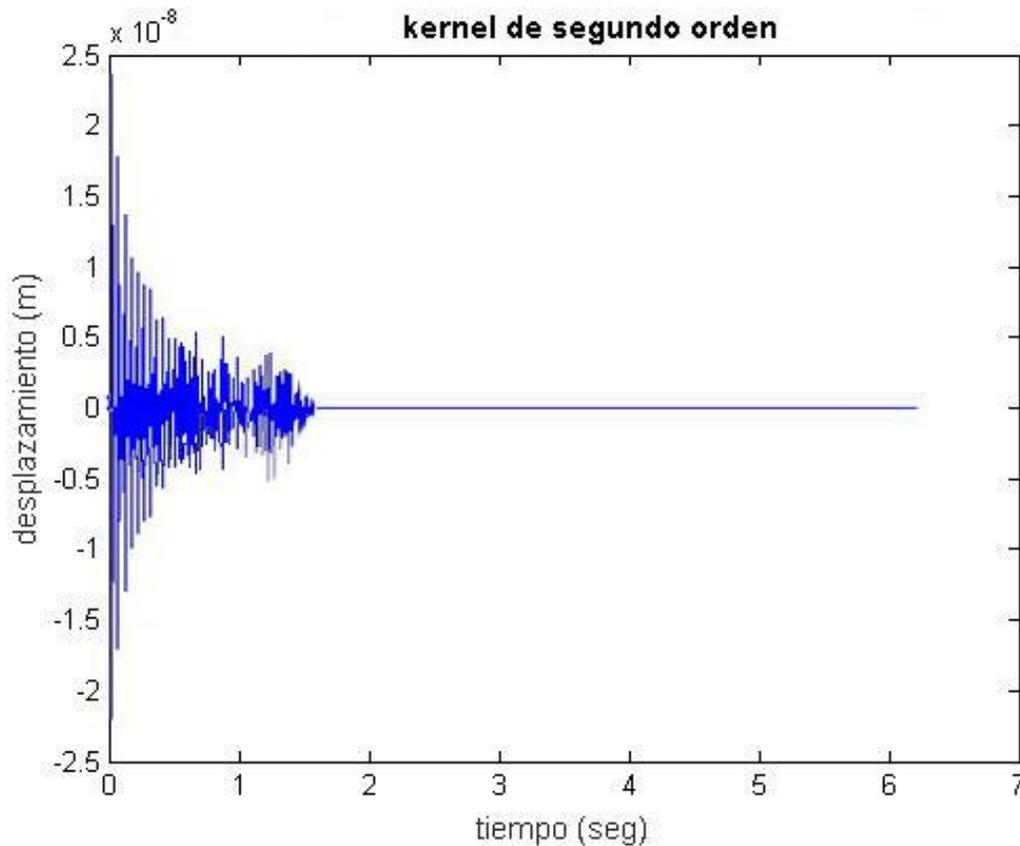


Figura.- 10 Kernel de segundo orden

Se debe observar que no importa el orden del Kernel ya que es necesaria únicamente una convolución de la respuesta al impulso unitario correspondiente al n-ésimo orden de las ALEs.

Considerando ah_1 y que $h_s = h_1$ en producto por h_1 , el calculo de h_2 se puede realizar también por convolución.

h_s es el producto de h al cuadrado que es con quien se va a convolucionar $h_{1(2)}$

$$h_p = h_{1(2)} * h_s \quad (3.45)$$

Teniendo entonces como resultado:

$$h_2 = h_p \quad (3.46)$$

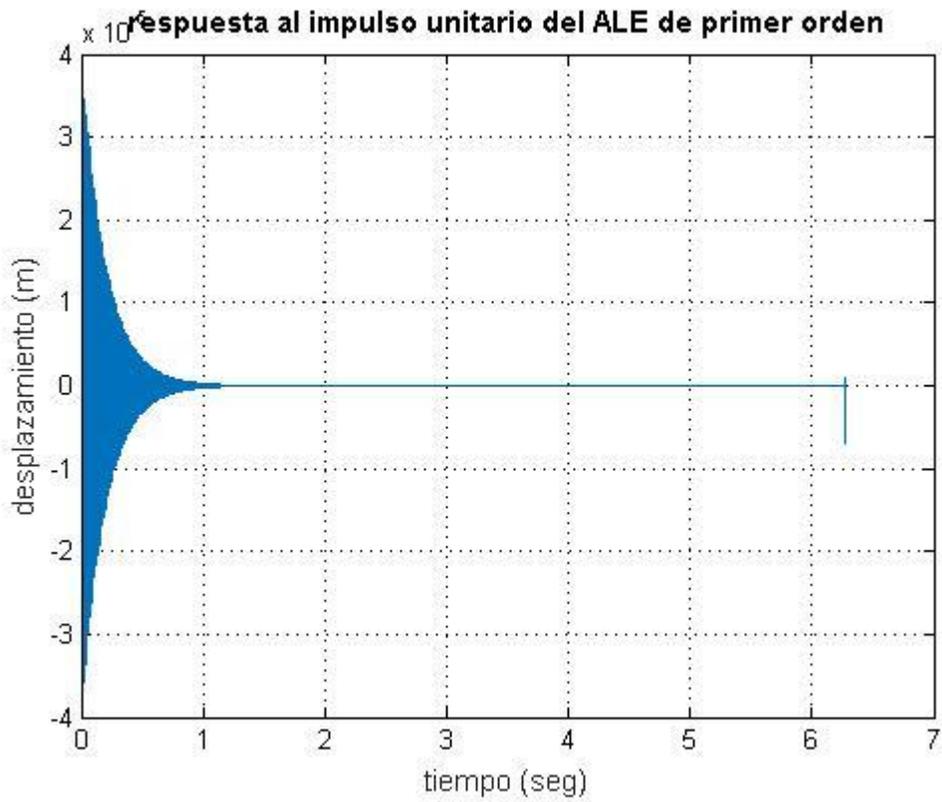


Figura.- 11 Respuesta al impulso unitario de la ALE de primer orden

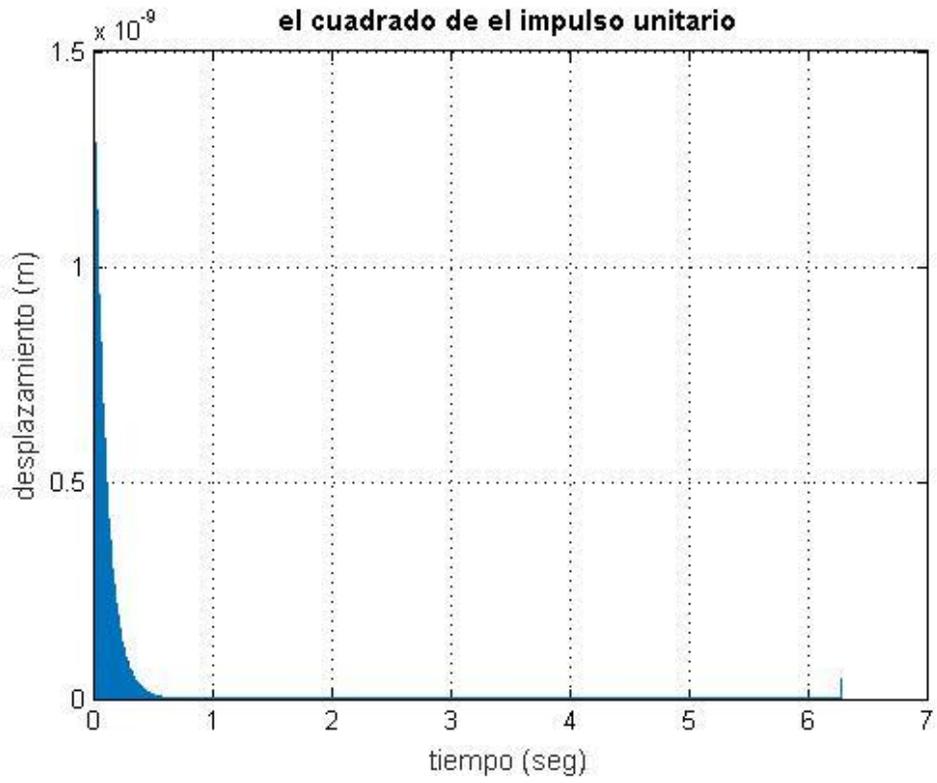


Figura.- 12 Impulso unitario elevado al cuadrado

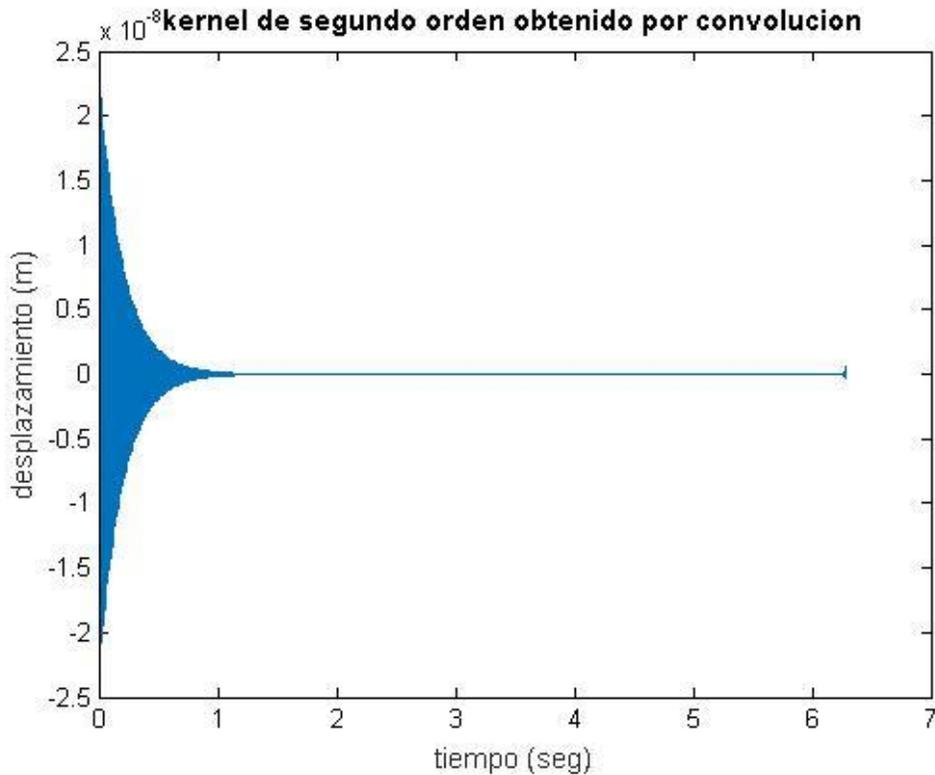


Figura.- 13 Kernel de segundo orden por convolución

CAPITULO IV

4. TFTC multidimensional

La Transforma de Fourier de Tiempo Corto (TFTC) debe utilizar ventanas para seleccionar los tramos de la señal de entrada que influyen en la respuesta del sistema de cierto orden. Por ser la ventana más comúnmente usada, se hará uso de la ondícula llamada "Sombrero Mexicano". La forma en que cada tramo de la señal influye en la respuesta del sistema en cierta región del tiempo va a ser encontrada en base a la relación kernel-repuesta unitaria encontrada en la sección anterior. La TFTC permitirá definir la importante función que aquí se denominará "Función de Respuesta a la Frecuencia de Tiempo Corto" (FRFTC) cuya interpretación es totalmente equivalente a la común FRF para sistemas no lineales invariantes en el tiempo.

4.1.- Programación de la TFTC para sistemas lineales

La transformada de Fourier nos permite descomponer una señal en una suma infinita de fasores. Cada uno de ellos se distingue por un coeficiente complejo asociado a

una frecuencia. Así, la señal representada por estos coeficientes complejos se conoce como la señal en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, si el sistema varía en el tiempo, entonces los coeficientes de los fasores cambian, es decir, la señal en frecuencia.

La transformada de Fourier no detecta estos cambios en el tiempo, por ello se le añade una función “ventana” que nos permite visualizar los cambios en el tiempo. A esto se le llama Short Time Fourier Transform (STFT) o transformada de Fourier de tiempo corto (TFTC). La limitación de esta transformada depende del ancho de la ventana; de tal forma que para una ventana muy ancha podemos ser precisos en frecuencia pero tendremos limitaciones en tiempo y viceversa.

En la descripción de la TFTC se usa una función auxiliar cuya definición es:

$$f_b(t) = f(t)\phi(t - b) \quad (4.1)$$

En donde la función $f(t)$ es la señal de entrada y la función $\phi(t - b)$, es lo que se conoce como ondícula. Aunque se han desarrollado diversas ondículas, como primer acercamiento a la TFTC multidimensional, se usará una de las ondículas más utilizadas denominada “Sombrero Mexicano”. Esta ondícula opera como una ventana imperfecta, ya que no es uniforme a lo largo de su ancho de banda. Con esto se pretende poder conocer la respuesta del sistema no lineal a través de los cambios temporales del sistema.

La TFTC es en realidad la TF de la función $f_b(t)$ de la ecuación 4.1

$$W_\psi f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.2)$$

Definiendo,

$$\Psi_{a,b} = \phi(a, t - b)e^{-i\omega t} \quad (4.3)$$

Se obtiene la clásica definición de la TFTC,

$$W_\psi f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b} dt \quad (4.4)$$

4.1.1.-Definición de ondícula

La ondícula llamada sombrero Mexicano

Una función Gaussiana es una función de distribución de probabilidad dada por la siguiente ecuación,

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.5)$$

Su segunda derivada negativa normalizada se denomina ondícula de Ricket que por su forma gráfica se le denomina sombrero mexicano. En el caso unidimensional, la expresión matemática es,

$$\emptyset(\sigma, \mu) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma\pi^{\frac{3}{4}}} \left(1 - \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.6)$$

Donde la varianza σ y la media μ determinan el ancho de la ondícula y el punto donde se centra respectivamente. Dada una señal a analizar, nos permite seleccionar la región en el tiempo en la que nos queremos enfocar y que tan ancha es la región que deseamos analizar, véase Figura 4.1.

Puede verse en la Figura 4.2 la ondícula de sombrero mexicano en el dominio de la frecuencia. Se puede observar que el cambio de media μ no afecta a la ondícula, pero su ancho determinado por la varianza σ si afecta su magnitud y su ancho de banda

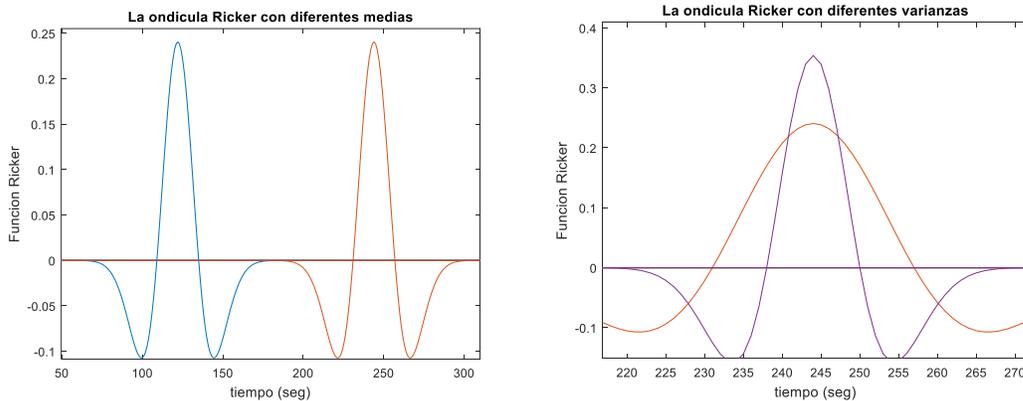


Figura.- 14 La media μ y la varianza σ permiten controlar como la ondícula cubrirá alguna región específica.

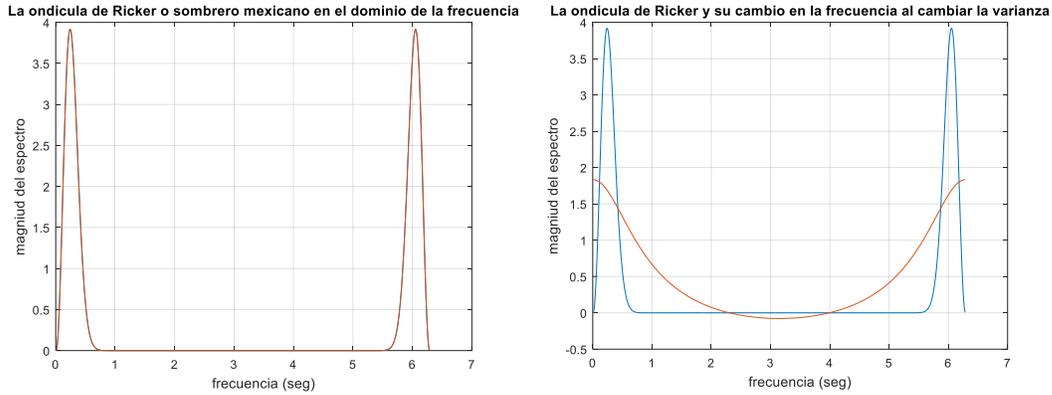


Figura.- 15 La ondícula sombrero mexicano. a) Como cambia cuando la media cambia b) cuando la varianza cambia

4.2.-Descripcion del kernel de alto orden afectado por la ondícula

Si sabemos que, en el caso particular de segundo orden de un Oscilador Duffing:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau) h_1(\tau_1 - t) h_1(\tau_2 - \tau) d\tau \quad (4.7)$$

Se observa que el segundo kernel está compuesto de tres impulsos unitarios. Cuando hablamos de un sistema cambiante en el tiempo, tenemos el problema de que la integral mostrada en la ecuación (4.7) posee impulsos unitarios cambiantes en el tiempo. Al ser una señal por analizar, no sabemos exactamente en qué punto puede estar cambiando, por lo que es necesario establecer una zona relativamente arbitraria de acción de cierta respuesta de impulso unitario en alguna región del tiempo determinada. Por lo que podríamos definir una respuesta al impulso unitario variante en el tiempo haciendo uso de una ventana como,

$$\eta_1(a, b, t - \tau) = h_1(t - \tau) \phi(a, t - b) \quad (4.8)$$

Donde ϕ no necesariamente está en la misma región donde la ondícula es distinta de cero (alrededor de b). Es decir, solo representa la fracción reminiscente de la respuesta aún no incluya el momento en que se produce el impulso unitario. Basándonos en esta definición,

la ecuación equivalente a la 4.7 deberá contemplar estos cambios en las respuestas lineales, entonces se tendría

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau)h_1(\tau_1 - t)\phi(a_1, t - b_1)h_1(\tau_2 - \tau)\phi(a_2, t - b_2)d\tau$$

esto representa la respuesta a solamente dos momentos de los impulsos unitarios, es decir a las condiciones de la señal alrededor de un tiempo específico. Hay que considerar que aún la respuesta de segundo orden puede estar afectada en el tiempo debido a cambios en su respuesta lineal. Por tanto el segundo orden también será válido en solamente un momento específico y por tanto se tendrá que hablar de:

$$\eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{1(2)}(\tau)\phi(a_3, t - b_3)h_1(\tau_1 - t)\phi(a_1, t - b_1)h_1(\tau_2 - \tau)\phi(a_2, t - b_2)d\tau$$

(4.9)

Válido únicamente para las regiones en el tiempo definida por a_3 y b_3 debido a las respuestas al impulso unitario en las regiones definidas por a_1, b_1 y a_2, b_2 . Por el uso de la ecuación 4.8, la ecuación 4.9 puede ser expresada

$$\eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(2)}(a_3, b_3, \tau)\eta_1(a_1, b_1, \tau - \tau_1)\eta_1(a_2, b_2, \tau - \tau_2)d\tau$$

(4.10)

En un sistema continuo en el tiempo, la relación entre la salida de segundo orden $y_2(t_1, t_2)$ y el kernel de segundo orden $h_2(\tau_1, \tau_2)$ es puramente formal ya que numéricamente son iguales. Esta relación se establece a través de los impulsos unitarios como sigue:

$$y_2(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)\delta(t_1 - \tau_1)\delta(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.11)$$

Debido a la naturaleza del impulso unitario $\delta(t - \tau)$ solamente cuando $t_1=t_2$ existe contribución al área bajo la curva, por lo que la ecuación de arriba puede reducirse a,

$$y_2(t) = y_2(t, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)\delta(t - \tau_1)\delta(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.12)$$

Sin pérdida de datos. Podríamos pensar en algo similar para sistemas cambiantes en el tiempo. Una ecuación equivalente a (4,11) sería,

$$y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} \eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2) \delta(t_1 - \tau_1) \delta(t_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.11)$$

Conteniendo las componentes de la señal extraídas de las regiones que la ondícula restrinja. Finalmente,

$$y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2) \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.12)$$

La señal total de segundo orden es entonces,

$$y_2(t) = \sum_j^n \sum_k^n \sum_i^n y_2(a_j, a_k, a_i, b_j, b_k, b_i, t) \quad (4.13)$$

Donde n es el total de ondículas utilizadas para cada operador lineal (Todos los operadores lineales usan las mismas ondículas y por tanto todas las sumatorias tienen n elementos).

Utilizando el mismo procedimiento de la sección anterior se puede obtener la relación entre el kernel de segundo orden variable en el tiempo y la respuesta al impulso unitario variable en el tiempo del segundo ALE. Similar a la ecuación (3.38)

$$\eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(2)}(a_3, b_3, \tau) \eta_1(a_1, b_1, \tau - \tau_1) \eta_1(a_2, b_2, \tau - \tau_2) d\tau \quad (4.14)$$

Lo aquí expuesto puede extrapolarse a cualquier orden n superior. El kernel de orden n para sistemas variantes en el tiempo como función de puras respuestas a impulsos unitarios puede definirse así,

$$\eta_n(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(n)}(a_{n+1}, b_{n+1}, \tau) \eta_1(a_1, b_1, \tau - \tau_1) \dots \eta_1(a_n, b_n, \tau - \tau_n) d\tau \quad (4.15)$$

Los kernels de orden superior pueden ser función de,

$$\eta_n(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(n)}(a_{n+1}, b_{n+1}, \tau) \eta_1(a_1, b_1, \tau - \tau_1) \dots \eta_1(a_n, b_n, \tau - \tau_n) d\tau \quad (4.16)$$

Considerando que para órdenes superiores a dos el kernel de orden n puede ser función de otros kernels de orden inferior, se tiene:

$$\eta_n(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1}) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(n)(a_{n+1}, b_{n+1}, \tau) \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{i_1=1}^{F(\frac{n}{p})} \sum_{i_2=1}^{F(\frac{n-i}{p-1})} \sum_{i_3=1}^{F(\frac{n-i-j}{p-2})} \dots \sum_{i_s=i_{s-1}}^{F(\frac{n-i-j-\dots}{2})} \eta_{i_1}(a_1, a_2, \dots, a_{i_1+1}, b_1, b_2, \dots, b_{i_1+1}, \tau - \tau_1, \tau - \tau_2, \dots, \tau - \tau_{i_1}) h_{i_3}(\tau - \tau_{i_2+i_1+1}, \tau - \tau_{i_2+i_1+2}, \dots, \tau - \tau_{i_1+i_2+i_3}) \dots \eta_{n-\sum_{k=1}^{p-1} i_k}(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \tau - \tau_1, -\tau, \dots, \tau - \tau_n) d\tau \quad (4.17)$$

4.3.- Obtención de la Función de Respuesta a la Frecuencia de Tiempo Corto FRFTC para Ecuaciones lineales asociadas (ALEs) de orden “n

La ecuación (4.12) es una doble convolución, sea,

$$y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2) \delta(t - \tau_1) \delta(t - \tau_2) d\tau_1 \right) d\tau_2 \quad (4.18)$$

La transformada de Fourier bidimensional puede separarse en integrales diferentes

$$\mathcal{F} f(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-i\omega_1 t_1} dt_1 \right) e^{-i\omega_2 t_2} dt_2 \quad (4.20)$$

O sea,

$$\mathcal{F} f(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F} f(t_1, t_2) e^{-i\omega_2 t_2} dt_2 \quad (4.21)$$

De la ecuación 4.18 , separando t en t_1 y en t_2 :

$$\mathcal{F} y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \eta_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \tau_1, \tau_2) \delta(t_1 - \tau_1) \delta(t_2 - \tau_2) e^{-i\omega_1 t_1} dt_1 \right) e^{-i\omega_2 t_2} dt_2$$

La integral interna es una convolución y por tanto su transformada es un producto de transformadas

$$\mathcal{F} y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1) e^{-i\omega_1 t_1} \delta(t_2 - \tau_2) \right) e^{-i\omega_2 t_2} dt_2$$

(4.22)

Donde en esta integral la transformada del impulso unitario es:

$$\mathcal{F} \delta(t - \tau) = e^{i\omega t}$$

Y el segundo impulso unitario $\delta(t_2 - \tau_2)$ es una constante que salio fuera de la integral. Volviendo a integrar (4.22)

$$\mathcal{F} y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, t_1, t_2) = N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 t_1} e^{-i\omega_2 t_2}$$

(4.23)

Si la transformada de y_2 se denota como $y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2)$ se tiene:

$$y_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (4.24)$$

Ya que solo se considera que $t_1 = t_2 = t$

Donde $N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2)$ es la función de respuesta a la frecuencia de tiempo corto, la cual queda definida, pero aun no se ha obtenido una expresión explicita; para esto retomemos la expresión 4.14 y obtengamos su transformada de Fourier:

$$N_a(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(2)}(a_3, b_3, \tau) \eta_1(a_1, b_1, \tau - \tau_2) \eta_1(a_2, b_2, \tau - \tau_1) e^{-i\omega_1 \tau_1} e^{-i\omega_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 d\tau$$

Esta ecuación se puede reacomodar con la sustitución siguiente:

$$\tau_a = \tau_2 - \tau$$

y

$$\tau_b = \tau_1 - \tau$$

Se obtiene entonces:

$$N_a(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(2)}(a_3, b_3, \tau) \eta_1(a_1, b_1, \tau_a) \eta_1(a_2, b_2, \tau_b) e^{-i\omega_1(\tau_b+\tau)} e^{-i\omega_2(\tau_b+\tau)} d\tau d\tau_a d\tau_b$$

Separando las integrales:

$$\begin{aligned} N_a(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1(2)}(a_3, b_3, \tau) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(a_1, b_1, \tau_a) e^{-i\omega_1\tau_a} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(a_2, b_2, \tau_b) e^{-i\omega_2\tau_b} \end{aligned}$$

Integrando:

$$N_a(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = N_{1(2)}(a_3, b_3, \omega_1 + \omega_2) N_1(a_1, b_1, \omega_1) N_1(a_2, b_2, \omega_2)$$

(4.25)

Por la fórmula 4.8, aplicando la transformada de Fourier

$$N_1(a, b, \omega) = \mathcal{F}\eta_a(a, b, t - \tau) = \mathcal{F}(h_1(t - \tau)\phi(a, t - b))$$

O sea,

$$N_1(a, b, \omega) = \int h_1(t - \tau)\phi(a, t - b) e^{-i\omega t} dt$$

Como también puede considerarse a "b" una constante una convolución, la solución es:

Donde

$$N_1(a, b, \omega) = H_1(\omega)\phi(a, b, \omega)$$

(4.26)

$\phi(a, b, \omega)$ es la transformada de Fourier de la ondícula. Sustituyendo en 4.25 se tendría:

$$N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2)\phi(a_3, b_3, \omega_1 + \omega_2) H_1(\omega_1)\phi(a_1, b_1, \omega_1) H_1(\omega_2)\phi(a_2, b_2, \omega_2)$$

Reordenando:

$$N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2)H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)\phi(a_3, b_3, \omega_1 + \omega_2)\phi(a_1, b_1, \omega_1) \phi(a_2, b_2, \omega_2)$$

Lo que da por consecuencia:

$$N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_1, \omega_2) \Phi(a_3, b_3, \omega_1 + \omega_2) \Phi(a_1, b_1, \omega_1) \Phi(a_2, b_2, \omega_2) \quad (4.27)$$

Por lo que se puede generalizar que la FRFTC de orden “n” está relacionada con su correspondiente FRF por:

$$N_n(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n+1}, b_{n+1}, \omega_1, \omega_2 \dots \omega_n) = H_n(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n) \Phi(a_{n+1}, b_{n+1}, \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) \prod_{i=1}^n \Phi(a_i, b_i, \omega_i) \quad (4.28)$$

Como $H_n(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n)$, está compuesto por puras $H_1(\omega)$ tiene componentes de HFRF's distintos de primer orden, las $\Phi's(\omega)$ deben estar acorde con las componentes $H_i(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_i)$.

4.4.-SIMULACION DE UN MODELO OSCILADOR DUFFING

4.4.1-Señal a analizar

La señal proviene de un sistema variante en el tiempo- Manteniendo los parámetros de éste constantes tenemos lo siguiente:

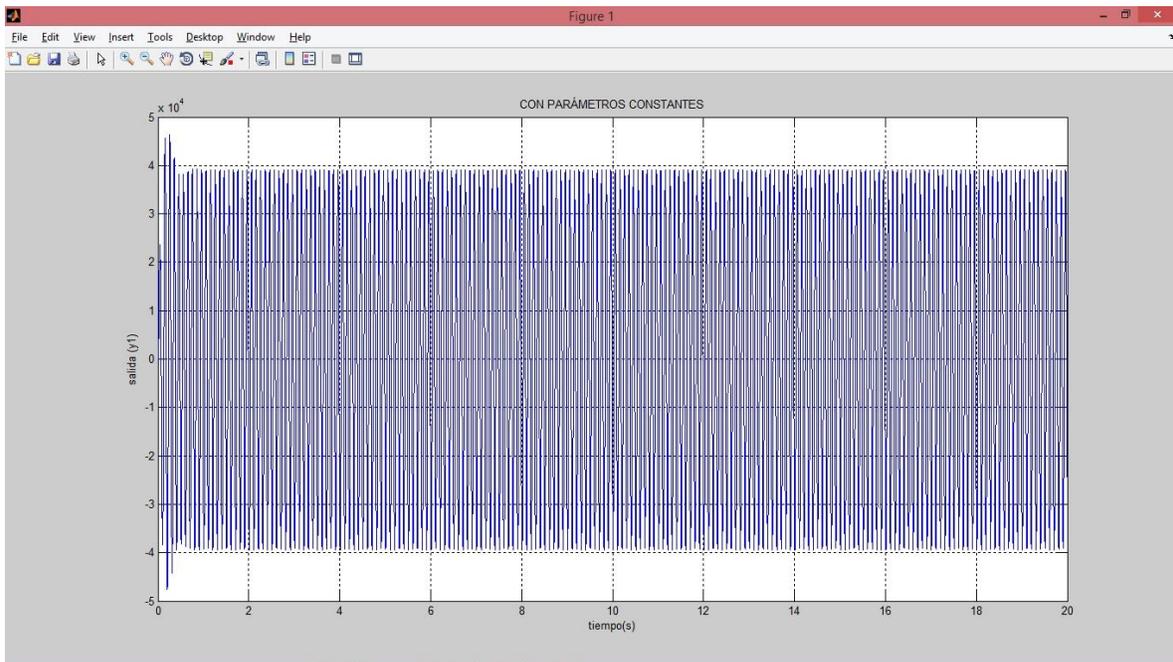


Figura.- 16 Sistema con parámetros constantes

Al variar los parámetros del sistema, como la frecuencia tenemos

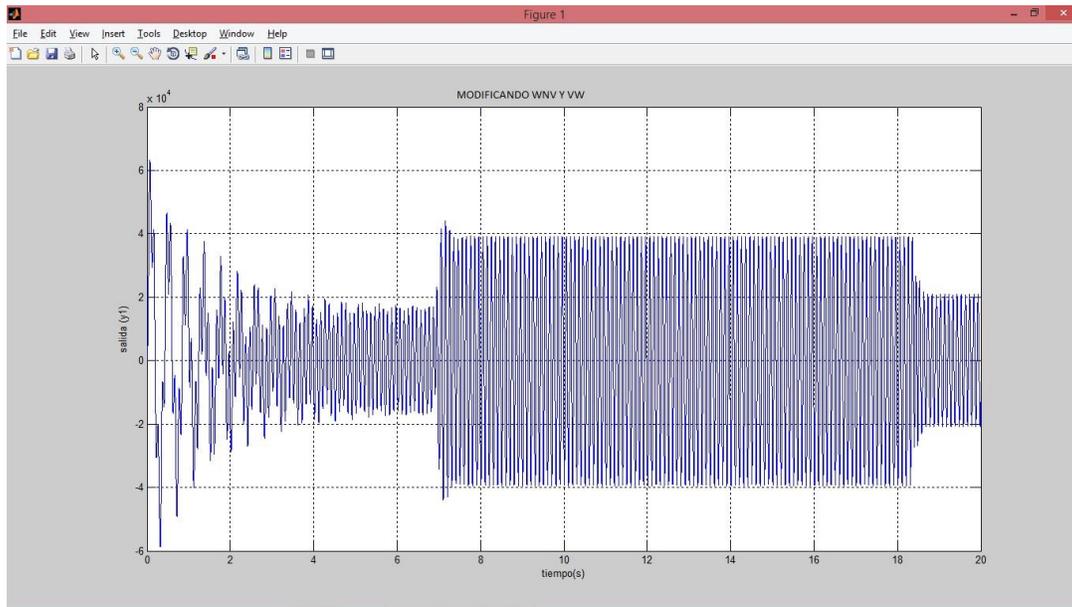


Figura.- 17 Sistema con variación en frecuencia

Variando el coeficiente de amortiguamiento

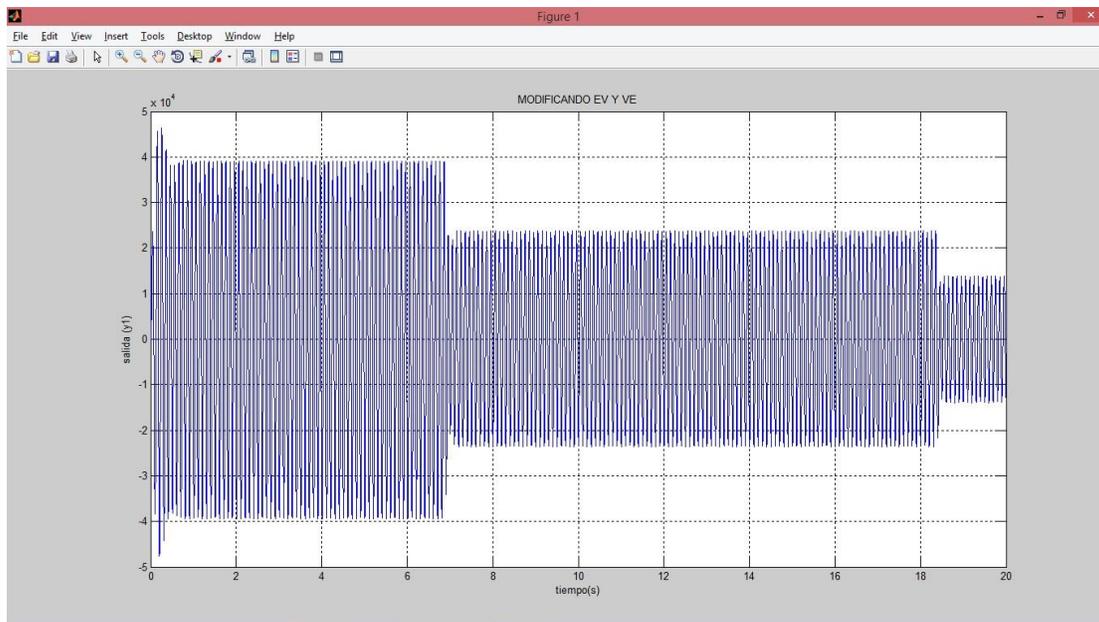


Figura.- 18 Sistema con modificación de amortiguamiento

Se observa entonces que variando los parámetros del sistema, su respuesta varía en el tiempo

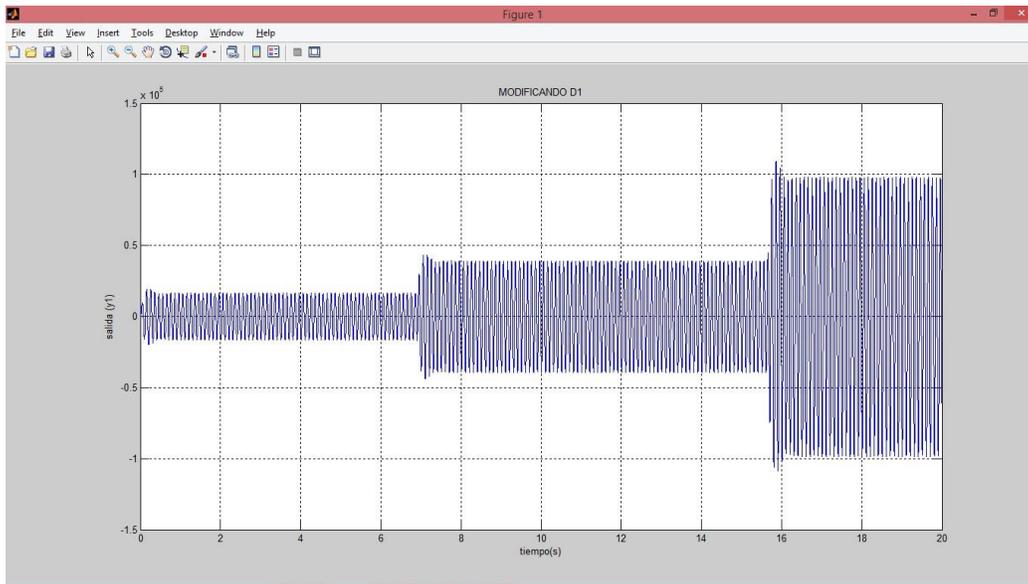


Figura.- 19 Respuesta del sistema con variación de parámetros

De los modelos de Volterra, el modelo Duffing tiene una retroalimentación de la señal de salida lo cual hace que el sistema sea no lineal. Para este trabajo se utilizó un modelo Duffing de 2º grado.

RUIDO BLANCO DE BANDA LIMITADA

La señal de entrada al sistema, seleccionada o apropiada para la realización del presente trabajo, fue el llamado “Ruido blanco de banda limitada”. Este tipo de “señal” contiene todas las frecuencias, y todas estas tienen la misma potencia, mostrando valores sin ninguna relación unos con otros, lo cual es adecuado para observar el comportamiento del sistema. Sin embargo es limitada por los valores de dt y T utilizados, dando como rango de frecuencias a utilizar desde ω mínima hasta ω máxima, calculadas como se muestra:

$$dt = (2)(\pi)(3000)$$

T es el periodo de la función, el cual está definido de acuerdo al tiempo utilizado para el evento

La frecuencia mínima utilizada es determinada en función del periodo:

$$\omega_{\min} = (2)(\pi)/T$$

y la frecuencia máxima

$$\omega_{\max} = (2)(\pi)/dt$$

El número de elementos “ n ” tendrá un valor de 1000 y los valores constantes de ζ y c son:

$$\zeta = 0.001$$

$$c = 25 \times 10^6$$

t es igual al tiempo.

Para obtener los coeficientes de la señal de ruido blanco, se utilizó el comando RAND en el software MATLAB. Los valores de los coeficientes del vector de valores aleatorios, generado por el comando RAND, nos da un número “ n ” de valores comenzando desde 0 hasta 10 (de igual forma esta cantidad de 10 es aleatoria), siendo entonces la orden utilizada:

$$R = 10(\text{rand}[1, n]); R$$

Esto nos genera entonces 1000 elementos, (siendo el valor de $n=1000$), aleatorios entre cero y el número 10. Estos 1000 elementos son los coeficientes de cada una de las frecuencias existentes en el rango limitado por omega mínima y omega máxima calculadas para el presente trabajo.

La señal de entrada es generada sera llamada “ x ” y es representada mediante la sumatoria siguiente:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i \text{Sen}(\omega, t)$$

estando conformada por la sumatoria de 1 hasta “ n ” de igual número de senoides acompañadas ya por sus respectivos coeficientes generados en anteriormente.

La grafica del ruido blanco de banda limitada generado, la cual es nuestra entrada al sistema o tambien llamada como la entrada al operador de primer orden, se muestra a continuacion:

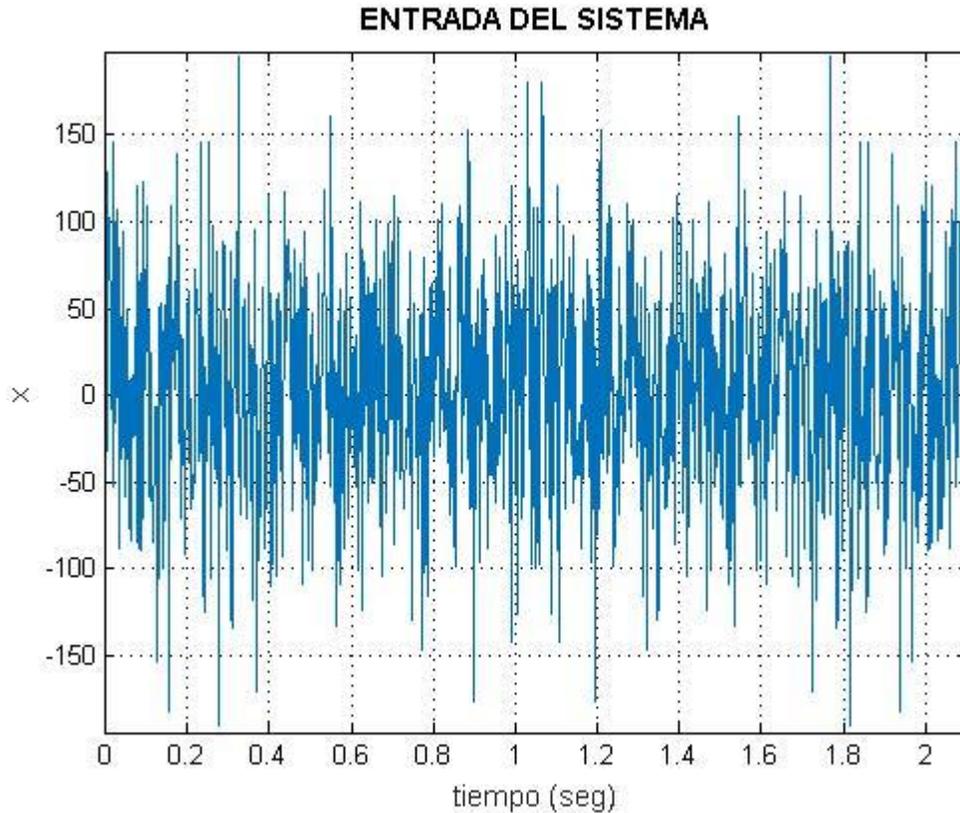


Figura.- 20 Señal de entrada al sistema

ALES DEL DUFFING Y SU SOLUCION EXACTA

Las ecuaciones lineales asociadas (ALES) trabajan con una entrada de orden “ n ” para producir una salida de orden “ n ”. A partir de cada ALE es posible determinar una función de respuesta a la frecuencia (FRF).

La FRF correspondiente a cada ALE involucrada en el análisis del sistema, es utilizada para determinar la solución EXACTA de cada una de las ALES, es decir, su respectiva salida de orden “ n ”.

A partir del modelo Duffing de segundo orden, el cual tiene la forma:

$$\ddot{y} + A\dot{y} + By + C_3y^2 = C_4x \quad (1a)$$

Es posible determinar las respectivas ALES de primero y segundo orden:

$$\dot{y}_1 + A\dot{y}_1 + By_1 = C_4x \quad (2a) \quad \text{Ale de primer orden}$$

$$\ddot{y}_2 + Ay_2 + By_2 = -C_3y_1^2 \quad (3a) \quad \text{Ale de segundo orden}$$

Siendo las respectivas FRFs de estas Ales, calculadas a partir de la prueba armónica:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 2i\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (A)$$

$$H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{C}{(\omega_1 + \omega_2)^2 + 2i\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (B)$$

Determinando la solución exacta entonces para cada ALE tenemos que:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega_1) R_0(\omega_1) e^{j\omega_1 t} d\tau_1$$

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) R_0(\omega_1) R_0(\omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} d\tau_1 d\tau_2$$

Para nuestros fines, desde el punto de vista de obtener la solución mediante software, estas ecuaciones se expresaran como sumatorias.

$$y_1(i) = \sum_{i=1}^n H(\omega) \frac{x_0}{2} e^{i\omega t} + H(-\omega) \frac{x_0}{2} e^{-i\omega t} \quad (C)$$

$$y_2(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) x_0^2 H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \quad (D)$$

SHORT TIME FOURIER TRANSFORMATION (STFT) DE "x" y de "y"

Usando la ecuacion (C) se obtiene la salida exacta del primer operador de Volterra, la cual esta construida para que cambie su frecuencia natural 4 veces. Los valores a utilizar en dichos cambios son 500, 750, 1000 y 300. La grafica de esta salida, denominada "y1", se muestra a continuacion:

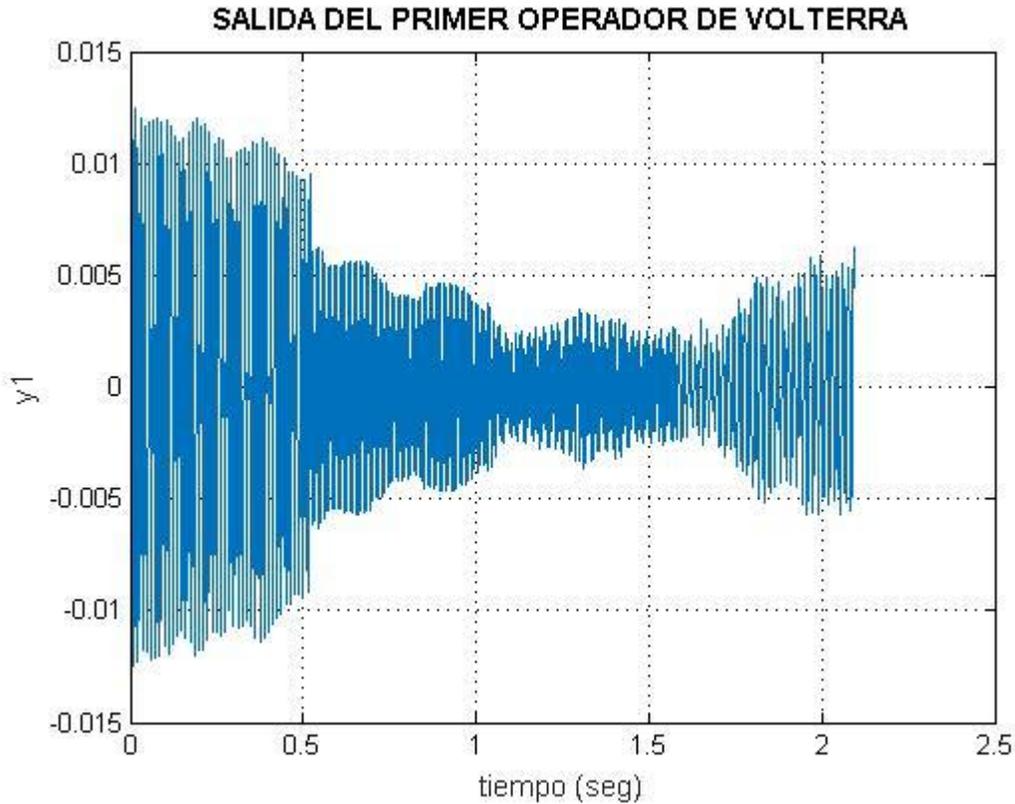


Figura.- 21 Salida del primer operador de Volterra

Para determinar la transformada de tiempo corto de Fourier (TFTC), (véase apartado 2.3 del capítulo II), de primer orden, tanto de la entrada como de la salida, se utilizara la ondícula “Sombrero Mexicano” como función ventana, de la cual se habló ya en el apartado 4.1.1 de este capítulo 4, y cuyo diagrama de flujo es “Sombrero Mexicano” (ver el apéndice de diagramas).

Para ello es necesario primero seleccionar los valores más adecuados para los parámetros de la ondícula “Sombrero Mexicano”, tanto en su centrado como en su ancho, es decir, adecuar a la función ventana a utilizar en la TFTC, para abarcar el rango de datos adecuado sin tener pérdida alguna de información.

A prueba y error se determinan los valores de ancho de la ventana (sg) y salto de cada intervalo (st) de acuerdo con los requerimientos de lo pretendido a analizar, siendo en este caso los más adecuados para la función ventana “Sombrero Mexicano” a utilizar, los siguientes,

$$sg=0.05$$

$$st = 200$$

Se muestra a continuación la gráfica de la ondícula “Sombrero Mexicano” utilizada como ventana en el presente trabajo para la TFTC pretendida.

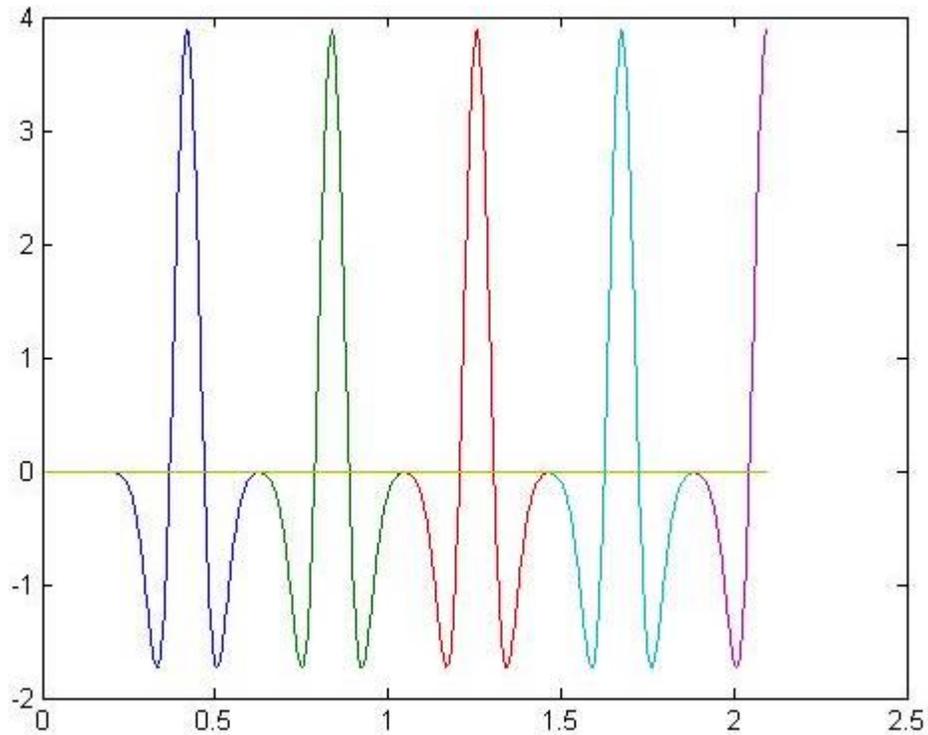


Figura.- 22 Ondícula “sombrero mexicano”

Con dicha ondícula como función ventana se procede a determinar la transformada, que se denominará “X1”, de la entrada “x”. En la gráfica de contorno puede apreciarse que, conforme a la entrada aleatoria de ruido blanco limitado “x”, la transformada es correcta, observándose esto en las variaciones que la señal “X1” muestra en sus amplitudes en la transformada realizada.

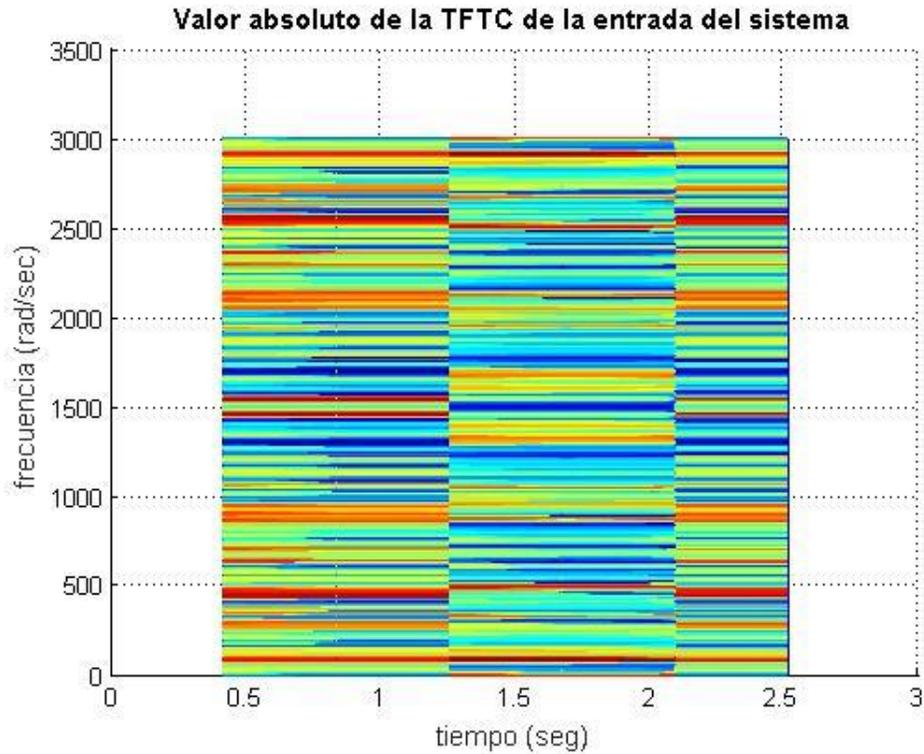


Figura.- 23 TFTC de la entrada al sistema

De igual forma, realizando la transformada de tiempo corto de Fourier de la salida "y1", respectiva a la ALE de primer orden, en su grafica de contorno se aprecian los cambios en los valores de frecuencia seleccionados como se mencionó al principio de este apartado, siendo mas intensa la influencia en el valor de 500 el cual es la frecuencia seleccionada como la natural del sistema y mostrando amplitudes menores de influencia en los otros valores de frecuencia seleccionados, 300, 750 y 1000.

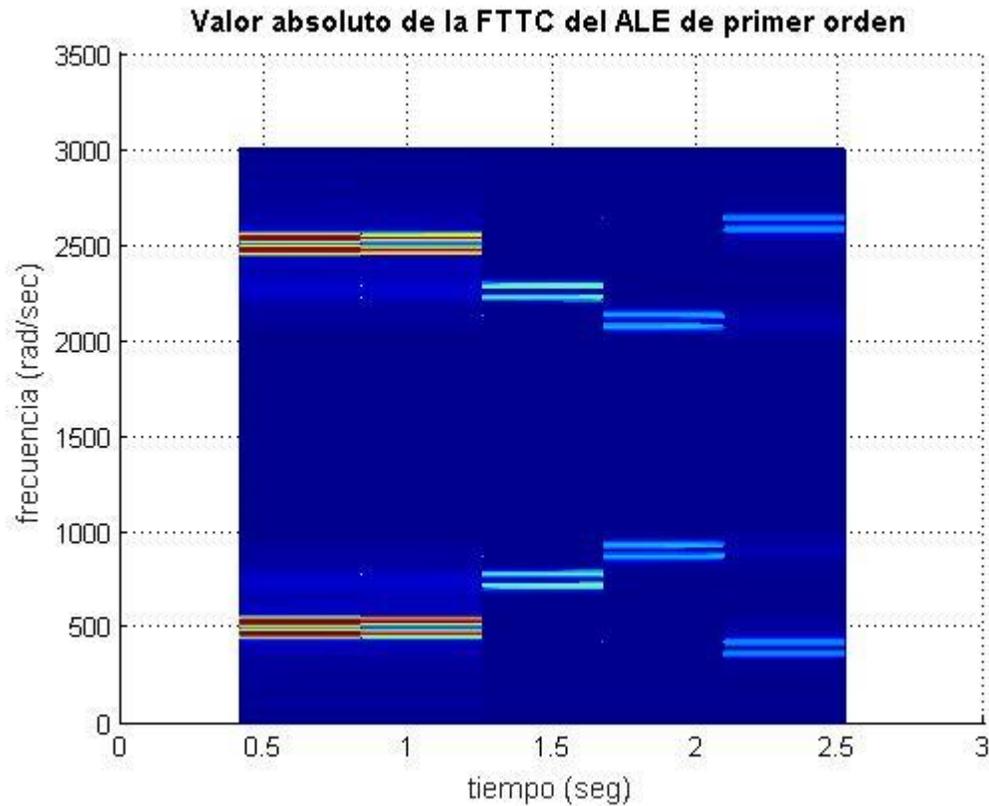


Figura.- 24 TFTC de la primer ALE

La relación entre la entrada y salida de un sistema, que es el cociente entre las transformadas realizadas anteriormente, es denominada *ratio*.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

El ratio es la función de respuesta a la frecuencia (FRF) correspondiente a la ALE de primer orden (en este caso), y que denota el cambio sufrido por la entrada, en la salida. La grafica de la FRF se muestra a continuación:

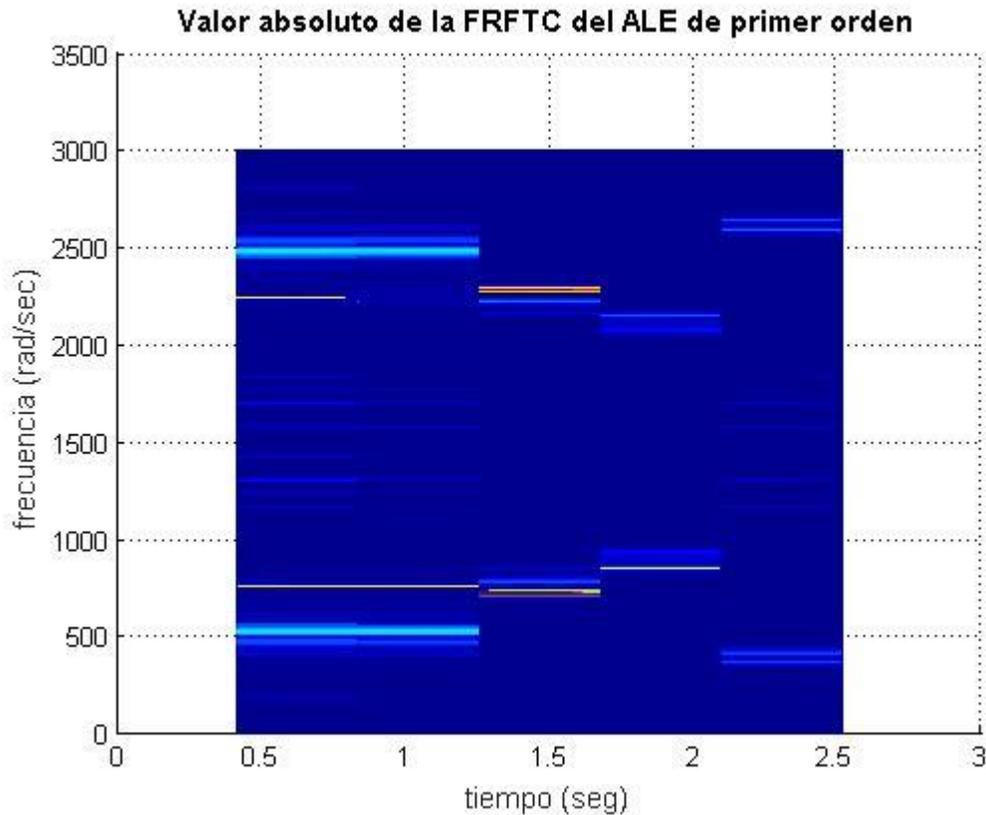


Figura.- 25 FRFTC de la primer ALE

Previa presentación de la salida “y1” del sistema, se puede notar que la FRF presenta influencia en los valores de frecuencia seleccionados al inicio de este capítulo, es decir para 500, 750, 1000 y 300, y por lo tanto la salida es correcta.

4.4.2.-Obteniendo la TFTC

La transformada de Fourier de tiempo corto podría definirse así para el segundo orden,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a_3, t_1 - b_3, t_2 - b_3) f_2(t_1, t_2) \phi(a_1, t_1 - b_1) e^{-i\omega_1(t_1 - \tau_1)} \phi(a_2, t_2 - b_2) e^{-i\omega_2(t_2 - \tau_2)} dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Donde $\phi(a_3, t_1 - b_3, t_2 - b_3)$ es tan solo una definición formal, ya que $f_2(t_1, t_2)$ solo tiene significado físico cuando t_1 es igual a t_2 . La función $f_2(t_1, t_2)$, en esta integral puede expresarse como,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a_3, t_1 - b_3, t_2 - b_3) \phi(a_1, t_1 - b_1) \phi(a_2, t_2 - b_2) \\
&\quad \int \int H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) e^{i\omega_2(t_2 - \tau_2)} e^{i\omega_1(t_1 - \tau_1)} d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\omega_2(t_2 - \tau_2)} e^{-i\omega_1(t_1 - \tau_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

Lo que degenera en simplemente,

$$\mathcal{F}_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) = N_2(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, \omega_1, \omega_2) X_1(\omega_1) X_1(\omega_2)$$

Al ser una señal de segundo orden, se puede recobrar la verdadera naturaleza de la señal.

Sin embargo, se pudo haber realizado la transformada de tiempo corto de Fourier de primer orden,

$$\mathcal{F}_2(a, b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a, t - b) f_2(t_1) e^{-i\omega_1(t - \tau)} dt_1$$

Este resultado es válido, pero debido a que en realidad la señal es de segundo orden, entonces se hubiera obtenido una señal función de la suma de dos frecuencias

$$\mathcal{F}_2(a, b, \omega_1 + \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a, t - b) f_2(t_1) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)(t - \tau)} dt_1$$

De la misma manera se hubiera haber podido hacer una transformada tridimensional. Aunque en este caso los resultados no serias verdaderos. Esto es debido a que la naturaleza de la señal no se conoce.

La definición de la Transformada De Fourier de Tiempo Corto (TFTC) de manera generalizada para cualquier orden entonces, puede definirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, b_1, b_2, \dots, b_{n+1}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(a_{n+1}, t_1 - b_{n+1}, t_2 - b_{n+1}, \dots, t_n - b_{n+1}) \\
&\quad f_2(t_1, t_2, \dots, t_n) \phi(a_1, t_1 - b_1) e^{-i\omega_1(t_1 - \tau_1)} \phi(a_2, t_2 - b_2) \\
&\quad e^{-i\omega_2(t_2 - \tau_2)} \dots \phi(a_n, t_n - b_n) e^{-i\omega_n(t_n - \tau_n)} dt_1 dt_2 \dots dt_n
\end{aligned}$$

4.4.3- Obtención de la FRFTC de alto orden

DETERMINACION DE LA TRANSFORMADA CORTA DE FOURIER (TFTC) DE SEGUNDO ORDEN

Dada la naturaleza de las ALES, la entrada a la ecuación lineal asociada de según orden es la salida anterior y_1 , elevada al cuadrado, tal y como se mostró anteriormente mediante las ecuaciones (1a), (2a) y (3a), siendo esta última precisamente, la que muestra la entrada cuadrática, es decir:

$$x_2 = y_1^2$$

La entrada para el segundo operador de Volterra entonces, viene influenciada ya por la FRF de primer orden, es decir, con variaciones en los valores de frecuencia antes mencionados tal y como se muestra en la siguiente gráfica:

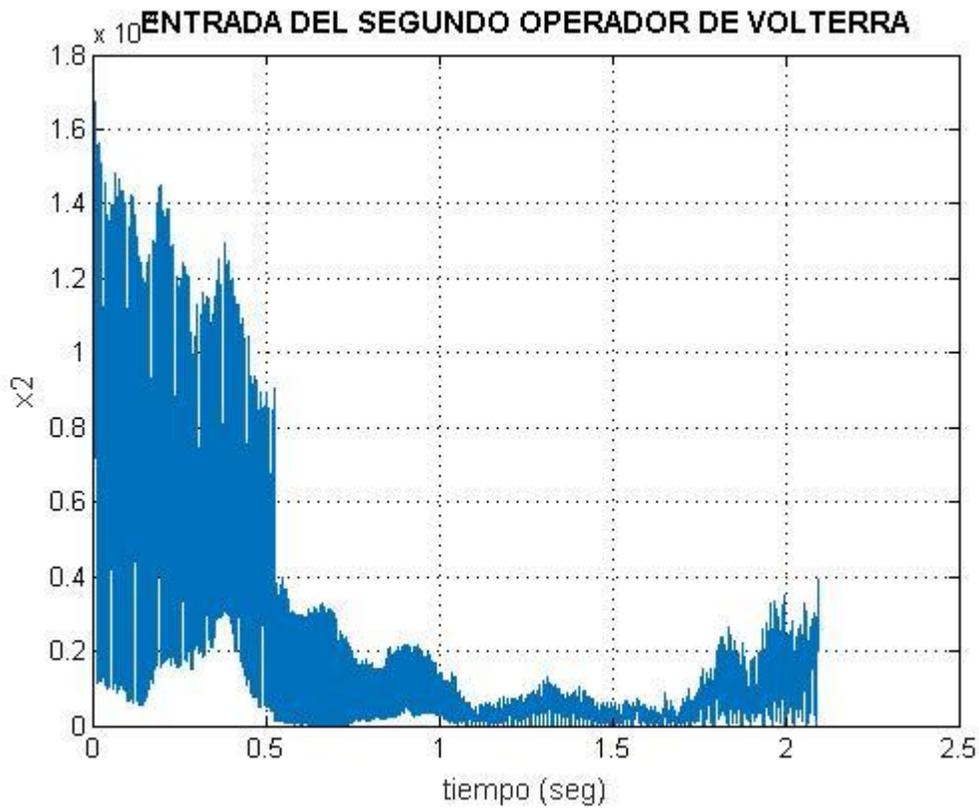


Figura.- 26 Entrada del segundo operador de Volterra

Y de acuerdo a ésta señal de entrada “x2”, la salida “y2” correspondiente es:

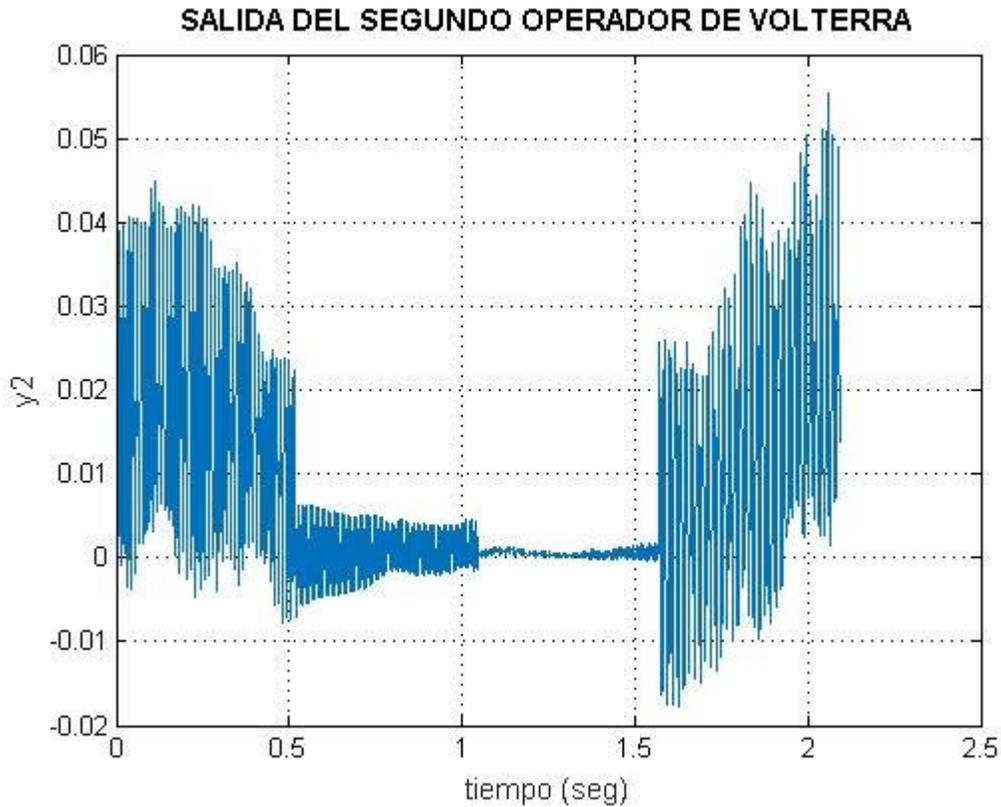


Figura.- 27 Salida del segundo operador de Volterra

Para obtener la TFTC de segundo orden, es necesaria la obtención de H_1 correspondiente a cada una de las frecuencias involucradas en este segundo orden, y de $H_{1(2)}$, ya que la expresión para la salida de la ALE de segundo orden, como se estableció anteriormente, es:

$$y_2(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} H_{1(2)}(\omega_1 + \omega_2) H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) x_0(\omega_1) x_0(\omega_2) e^{j(\omega_1 + \omega_2)t} d\tau_1 d\tau_2$$

Obteniendo H_1 , la cual es la misma para ambas frecuencias tenemos que:

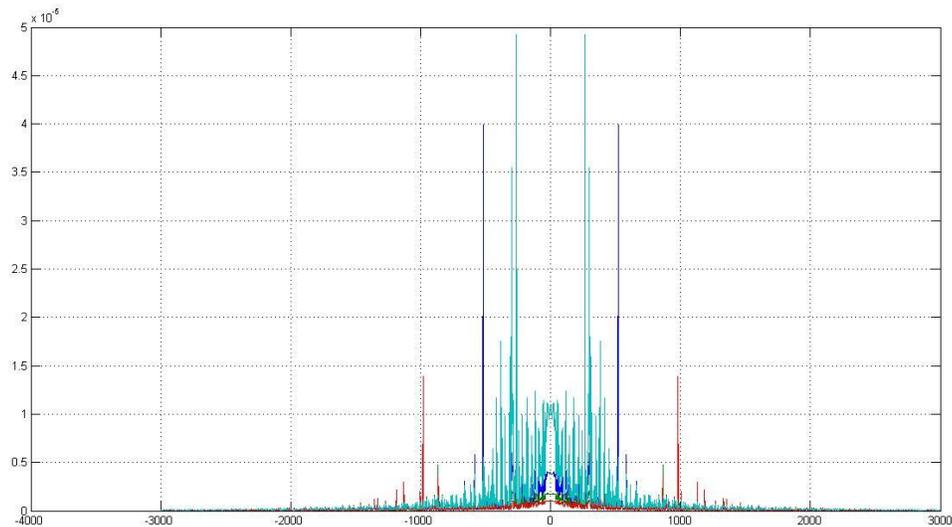


Figura.- 28 Salida de H_1

Y obteniendo $H_{1(2)}$ (ecuación 11 del capítulo III), el subíndice “1” indica que la FRF es un modelo lineal y el subíndice “2” entre paréntesis es el orden armónico de la entrada y salida.

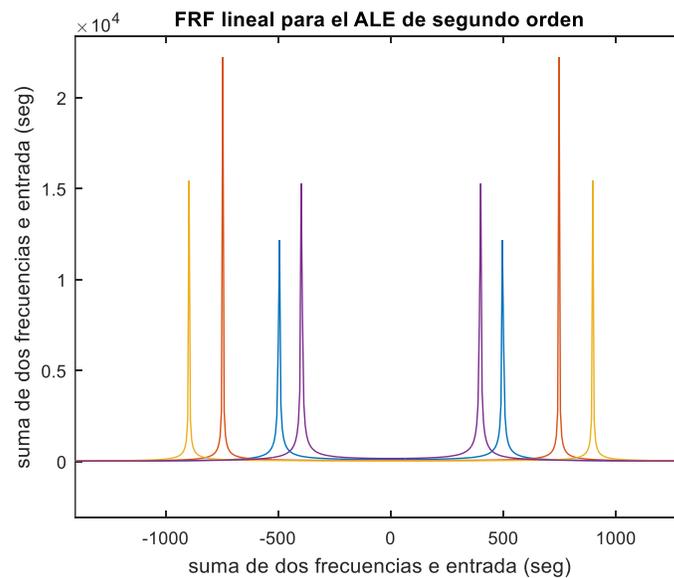


Figura.- 29 FRF lineal de la segunda ALE

De igual forma que para la ALE de primer orden, el proceso para la ALE de segundo orden es el mismo.

Mostradas en las figuras 4.7 y 4.8, la entrada "x2" y su respectiva salida "y2", se denomina "X2" a la transformada respectiva de la entrada "x2", y en su grafica de contorno se pueden observar los respectivos cambios de frecuencia en los valores ya mencionados anteriormente

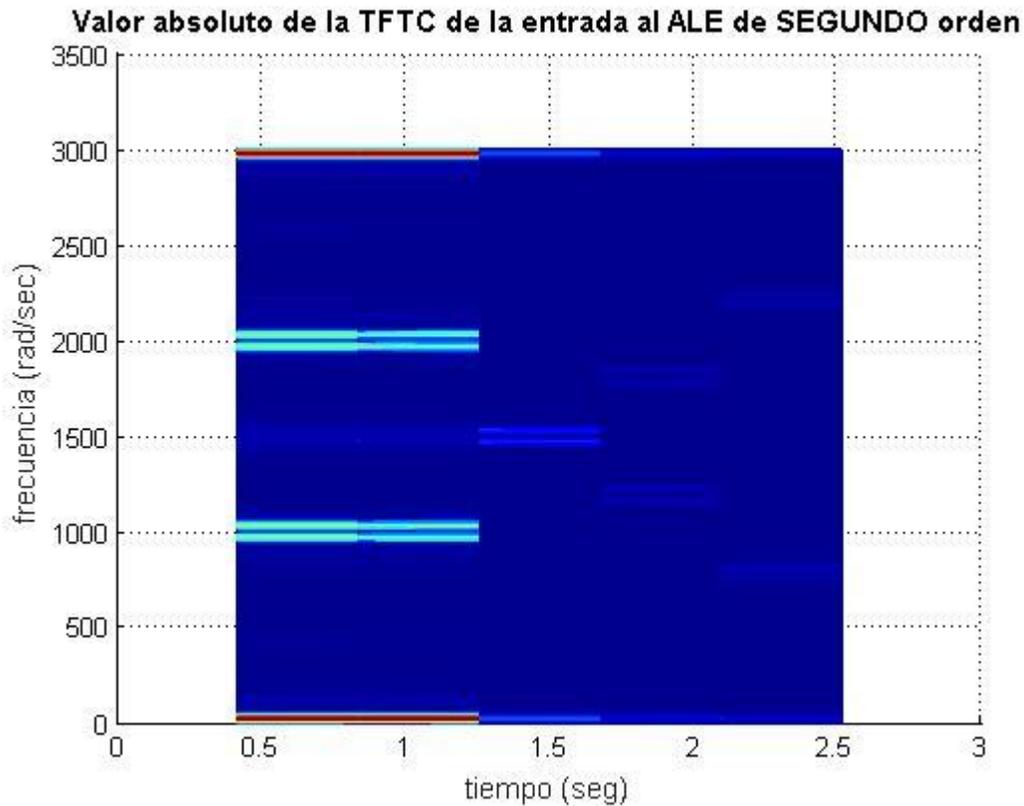


Figura.- 30 TFTC de la entrada de segundo orden

De igual forma, al realizar la transformada corta de Fourier de la salida "y2", la cual se designa como "Y2", en la gráfica de contorno se observan los cambios en la frecuencia con valor de 500. Mientras en las frecuencias de los valores seleccionados la visión es poca, en el valor de 300 para la frecuencia es muy marcado.

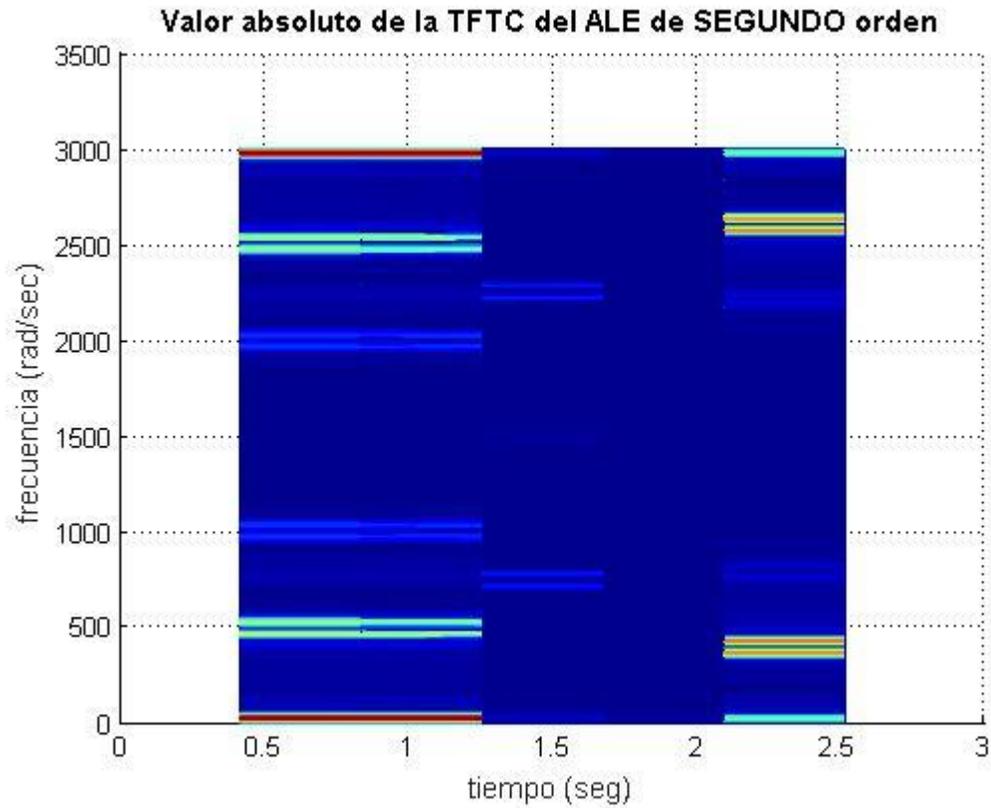


Figura.- 31 TFTC del ale de segundo orden

La relación entrada/salida o ratio entre estas transformadas, que no es más que la FRF para la ALE de segundo orden será:

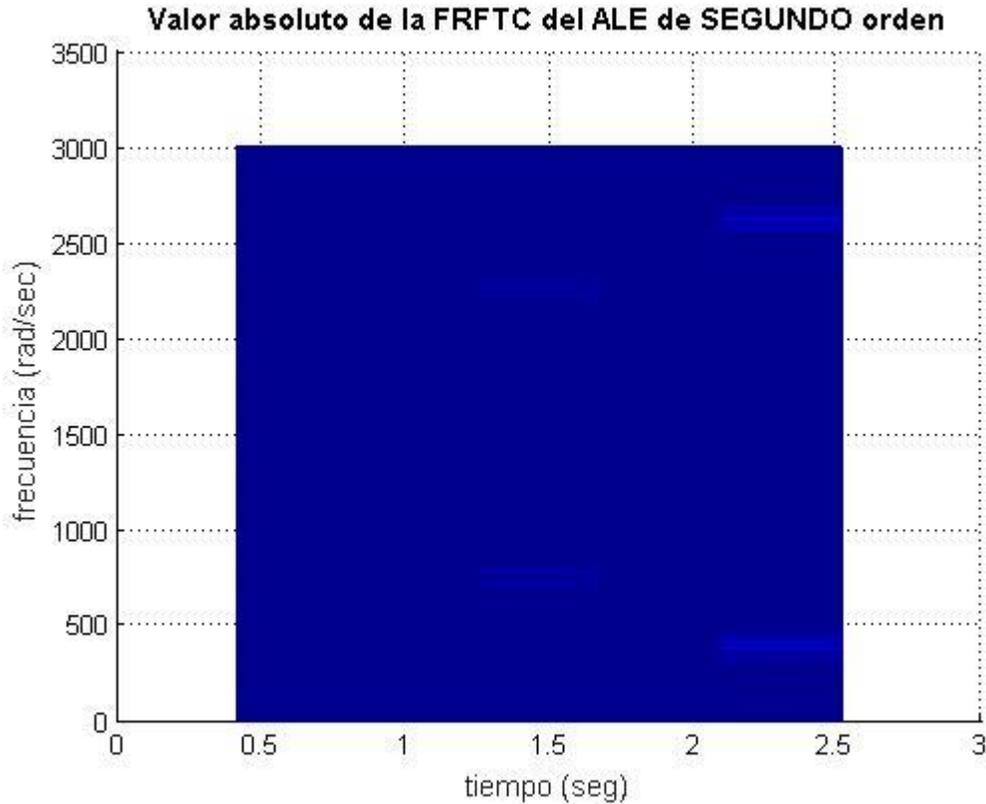


Figura.- 32 FRFTC ALE de segundo orden

La FRF de segundo orden, H_2 , determinada a partir de la ecuación:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

que es el radio o razón entre las respectivas transformadas de entrada y salida para cada ale de "n" orden, en este caso, está "influenciada" por un tp_1 y un tp_2 , correspondientes a cada una de las $H_1(\omega_1)H_1(\omega_2)$ como se muestra en la ecuación (D) y por un tercer tp_3 , el cual viene dado por $H_{1(2)}(\omega_1, +\omega_2)$. Así mismo, están involucrados las respectivas frecuencias para cada una de las transformadas realizadas en el cociente, de tal manera que, dado que tp_1 afecta a tp_3 y también está multiplicado por tp_2 , la influencia de tp_1 por llamarlo de alguna forma en conjunto, afecta a tp_2 y ambas afectan a tp_3 siendo esto consecuencia de los 3 viajes realizados a lo largo de la ondícula "Sombrero Mexicano" durante el proceso, dejando esto como consecuencia que el resultado de H_2 conste de 5 dimensiones, es decir, sea de esta forma pentadimensional.

La forma de poder visualizar lo anterior es “desglosando” en partes correspondientes a graficas de tp 's diferentes de H_2 , las cuales son correspondientes a las posibles combinaciones entre ellos, así por ejemplo, $H_{252} = H_2(2, i, 5, 2, j)$ donde los números son tp 's y las literales son frecuencias.

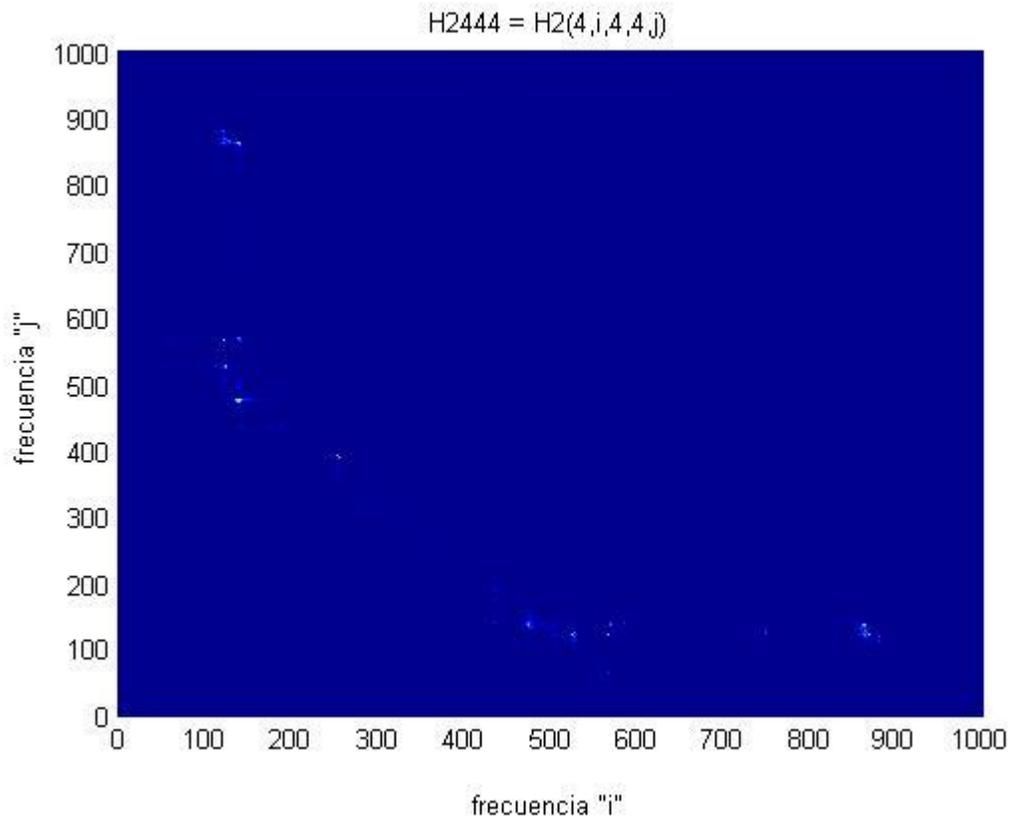


Figura.- 33 Zonas de influencia de H_2

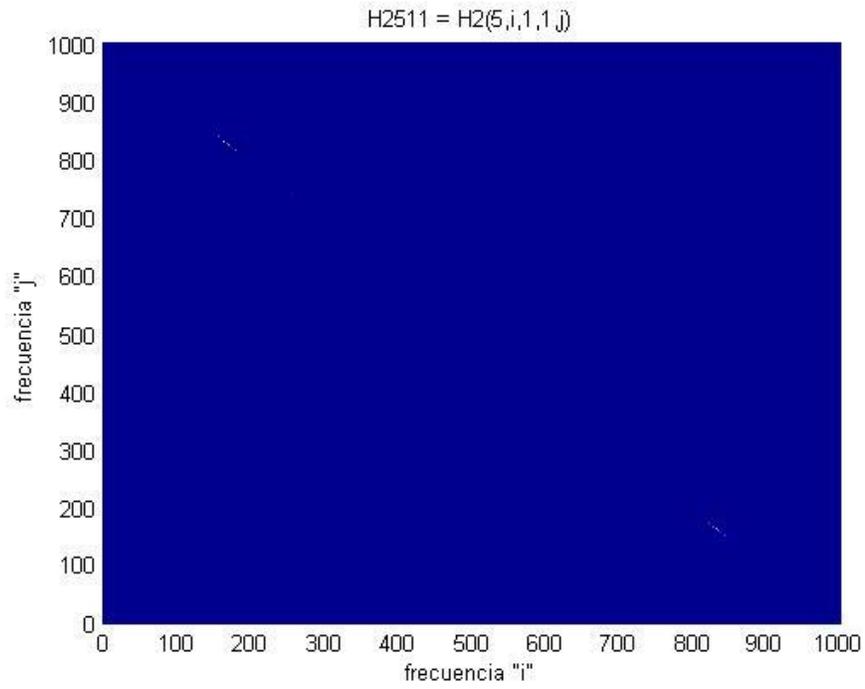


Figura.- 34 Zonas de influencia de H_2

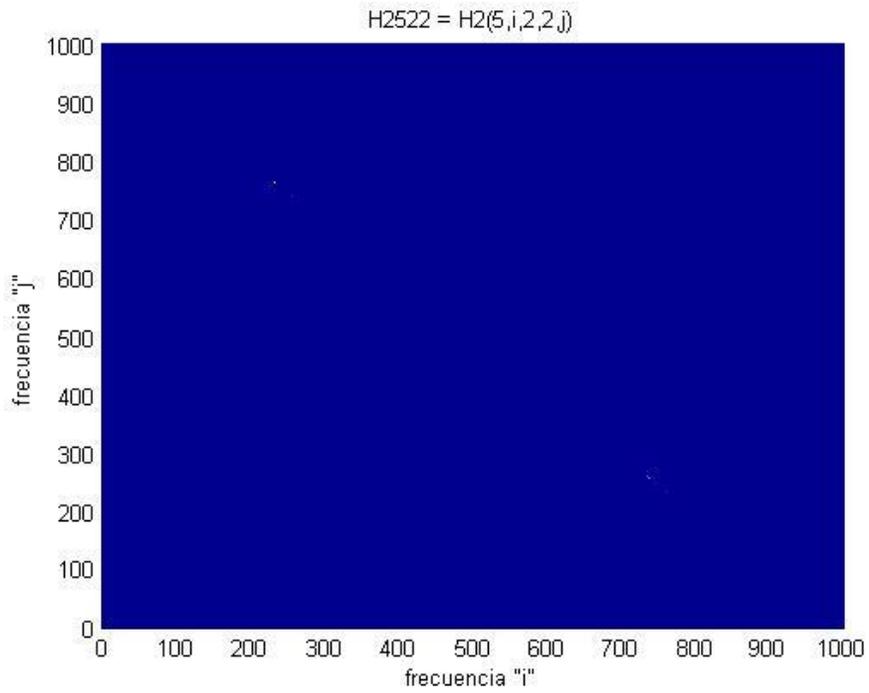


Figura.- 35 Zonas de influencia de H_2

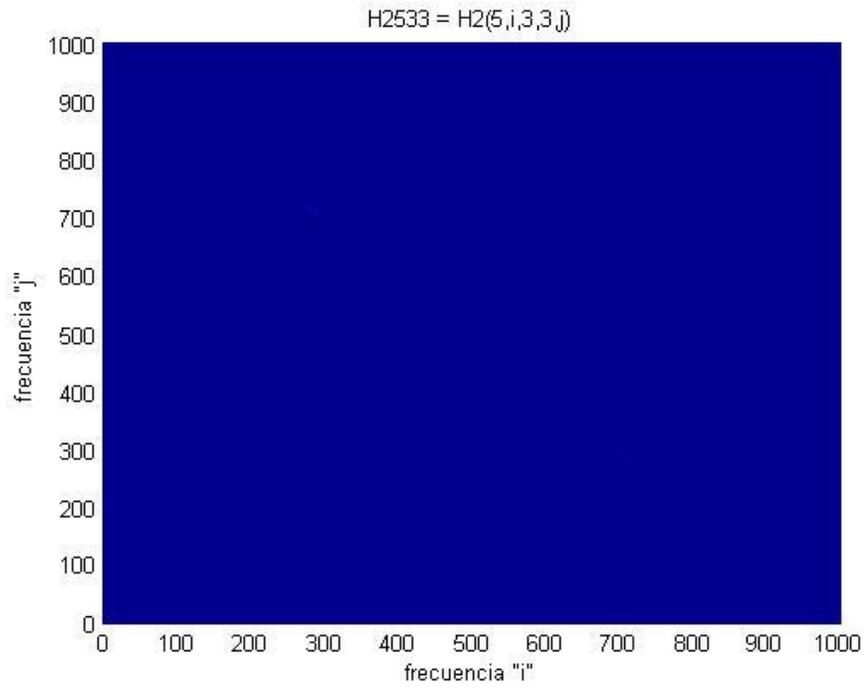


Figura.- 36 Zonas de influencia de H_2

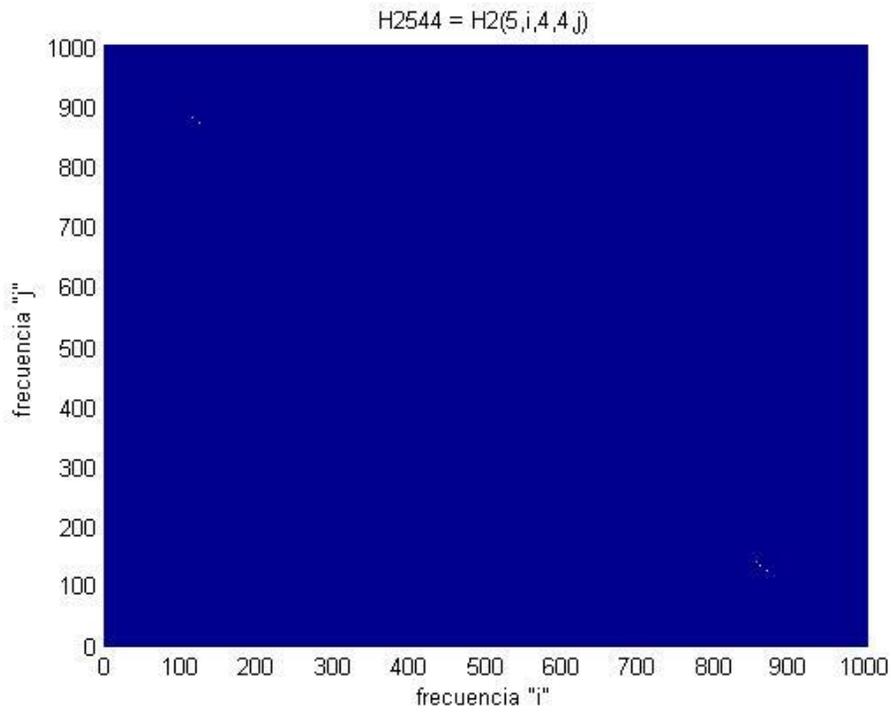


Figura.- 37 Zonas de influencia de H_2

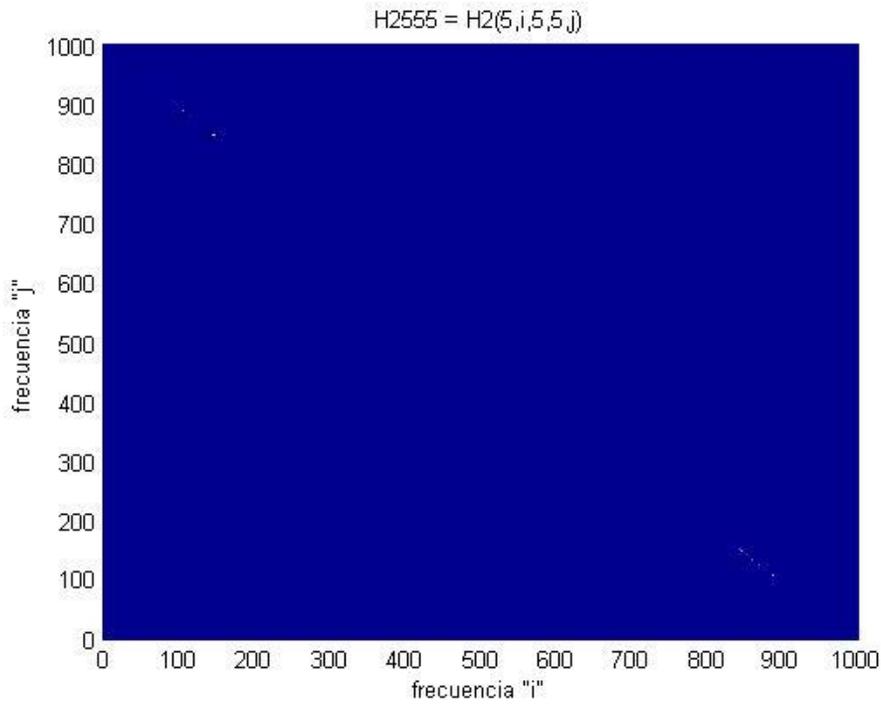


Figura.- 38 Zonas de influencia de H₂

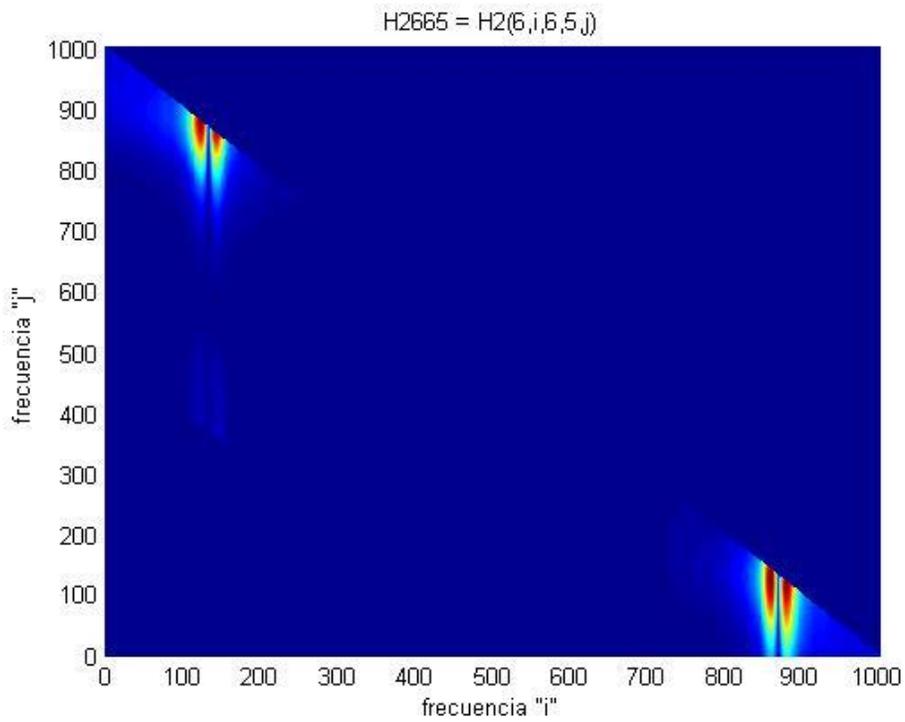


Figura.- 39 Zonas de influencia de H₂

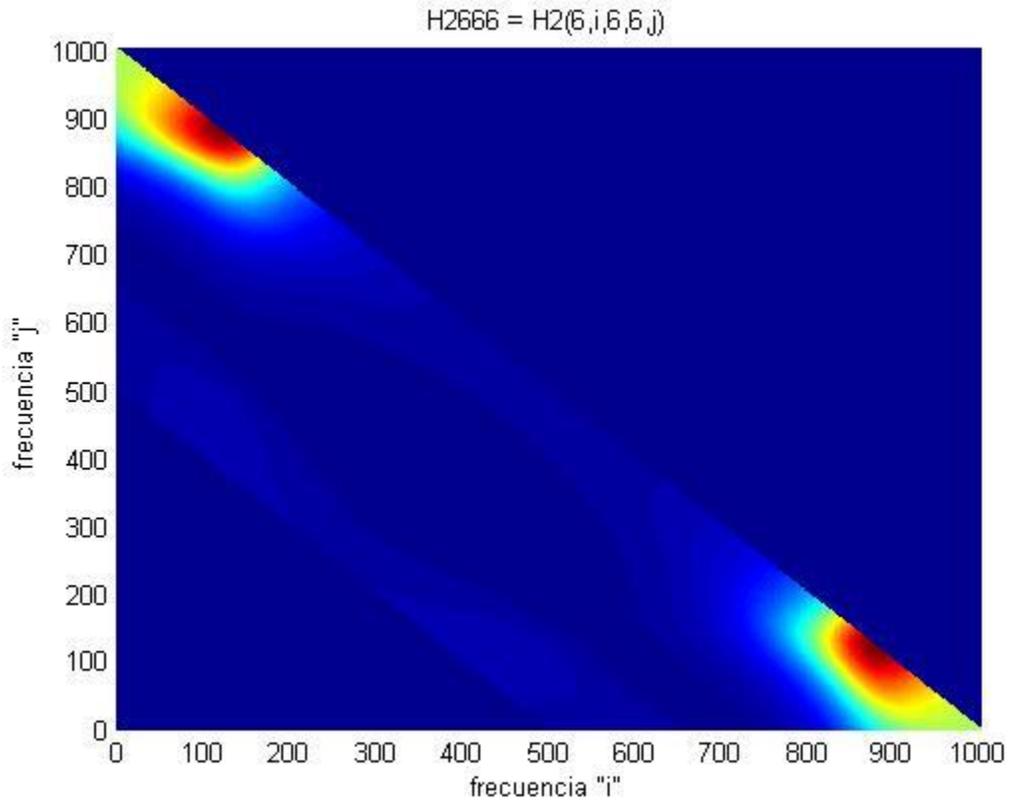


Figura.- 40 Zonas de influencia de H_2 .

La zona de influencia de H_2 queda bien marcada como una diagonal que involucra las combinaciones señaladas de $tp's$ con las respectivas frecuencias. Esta es la FRF de segundo orden.

CAPITULO V

5. Trabajo experimental

5.1.-Descripción del sistema RLC

De los modelos de Volterra, (Hammerstein, Wiener y Duffing), es el modelo Duffing el único que maneja una retroalimentación de la salida del sistema. Debido a la retroalimentación cúbica del sistema RLC de estudio, será este modelo, Duffing, el utilizado para su análisis.

Función de transferencia y función de respuesta a la frecuencia de un circuito RLC en serie.

La Figura 1 muestra un circuito serie, en el que se ha conectado una inductancia L, un capacitor C y resistencia R.

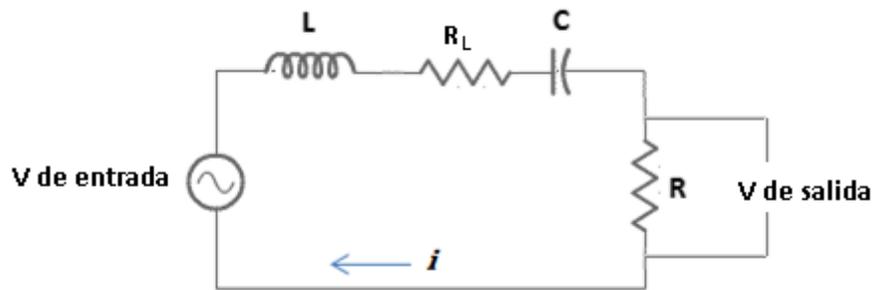


Figura.- 41 Circuito serie RLC.

De acuerdo con Morris y Senior (1994), el inductor es un elemento pasivo capaz de almacenar una cantidad limitada de energía en forma de campo magnético; al ser un inductor de alambre, tiene la propiedad de resistencia además de la inductancia. Cuando una corriente variante en el tiempo fluye en un inductor, se produce un flujo magnético, el cual se altera, lo que produce una f.e.m. en el inductor dada por:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \text{ en Voltios} \quad (5.1)$$

Integrando la ecuación (5.1),

$$\int v_L dt = = Li_L$$

Se tiene que,

$$i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt \text{ en Amperes} \quad (5.2)$$

Hayt, Kemmerly y Durbin (2007), manifiestan que la Ley de Ohm establece que el voltaje entre los extremos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del material, o

$$v_R = Ri_R \text{ en Voltios} \quad (5.3)$$

Donde la constante de proporcionalidad R recibe el nombre de resistencia; en términos de corriente se tiene que,

$$i_R = \frac{v_R}{R} \text{ en Amperes} \quad (5.4)$$

Un capacitor almacena energía en el campo eléctrico que se encuentra entre sus placas, el cambio en la carga dq coulombs, almacenada en un capacitor es

$$dq = C dv \quad (5.5)$$

Donde C es la capacitancia en Farads (F) del capacitor, y dv es el cambio en el voltaje entre las placas del mismo y el voltaje es, de acuerdo con Bolton (2001),

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \quad (5.6)$$

Derivando la expresión (5.6) queda,

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$

Se obtiene,

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (5.7)$$

La Tabla 1 resume las fórmulas para calcular el voltaje o la corriente eléctrica en cualquiera de los tres elementos del circuito RLC.

Tabla1. Compendio de fórmulas.

Variable física	Voltaje [V]	Corriente [A]
Resistencia eléctrica	$v_R = Ri_R$	$i_R = \frac{v_R}{R}$
Capacitor	$v_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$	$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$
Inductor	$v_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt$

Obtención de la función de transferencia del circuito serie RLC, considerando al Voltaje de fuente como entrada y el voltaje en la resistencia como salida.

La Figura 2 exhibe el circuito serie RLC anterior asignando un voltaje de salida en la resistencia R

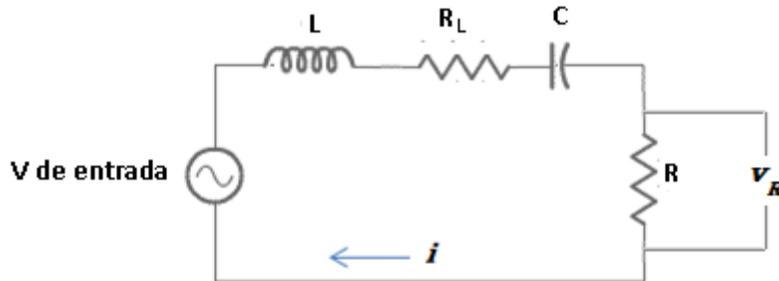


Figura.- 42 Voltaje de salida en la resistencia.

La ecuación general es entonces:

$$v = L \frac{di}{dt} + R_L i + \frac{1}{C} \int i dt + Ri \quad (5.8)$$

De acuerdo con Roca (2002),

$$i = \frac{v_R}{R} ; \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_R}{dt} ; \quad \int i dt = \frac{1}{R} \int v_R dt$$

Sustituyendo en la ecuación general (5.8),

$$v(t) = L \frac{1}{R} \frac{dv_R(t)}{dt} + R_L \frac{v_R(t)}{R} + \frac{1}{RC} \int v_R(t) dt + v_R(t) \quad (5.9)$$

Obteniendo la transformada de Laplace y simplificando,

$$V(s) = \frac{L}{R} s V_R(s) + R_L \frac{v_R(s)}{R} + \frac{1}{RC s} V_R(s) + V_R(s) \quad (5.10)$$

$$V(s) = V_R(s) \left[\frac{L}{R} s + \frac{R_L}{R} + \frac{1}{RC s} + 1 \right]$$

$$V(s) = V_R(s) \left[\frac{LC s^2 + R_L c s + 1 + RC s}{RC s} \right]$$

$$V(s) = V_R(s) \left[\frac{LC s^2 + R_L c s + RC s + 1}{RC s} \right]$$

Obteniendo la función de transferencia,

$$\frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{RCs}{LCs^2 + R_LCs + RCs + 1}$$

y dividiendo entre LC

$$\frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{\frac{RCs}{LC}}{s^2 + \frac{R_LCs}{LC} + \frac{RCs}{LC} + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{\frac{Rs}{L}}{s^2 + \frac{R_Ls}{L} + \frac{Rs}{L} + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{V_R(s)}{V(s)} = \frac{\frac{Rs}{L}}{s^2 + s\left(\frac{R_L+R}{L}\right) + \frac{1}{LC}}$$

Eliminando la parte real de la variable s de la función de transferencia se obtiene la expresión de la función de respuesta a la frecuencia (FRF):

$$H(i\omega) = \frac{\frac{R}{L}i\omega}{-\omega^2 + \left(\frac{R_L+R}{L}\right)i\omega + \frac{1}{LC}} \quad (5.11)$$

En esta expresión (5.11) se dividió por conveniencia entre LC .

Los valores utilizados en el modelo son:

$$R = 1.77 \text{ k}\Omega$$

$$C = 11.72 \text{ }\mu\text{F}$$

$$L = 0.767 \text{ H}$$

$$R_L = 460 \text{ }\Omega$$

Sustituyendo estos valores en la FRF del sistema, se tiene que

$$H(i\omega) = \frac{2311.603651 i\omega}{-\omega^2 + 2911.342894 i\omega + 111244.11} \quad (5.12)$$

La frecuencia natural del circuito es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

wn	=	333.532771	rad/s	53.08326513	Hz
----	---	------------	-------	-------------	----

La tarjeta de adquisición maneja hasta 10 V de entrada o salida como máximo, por lo que se manejó una señal de entrada compuesta de 3 senoidales con los valores siguientes:

Señal 1= 5 V a 10 Hz

Señal 2= 3 V a 50 Hz

Señal 3= 2 V a 80 Hz

Cálculo del error entre las señales de salida

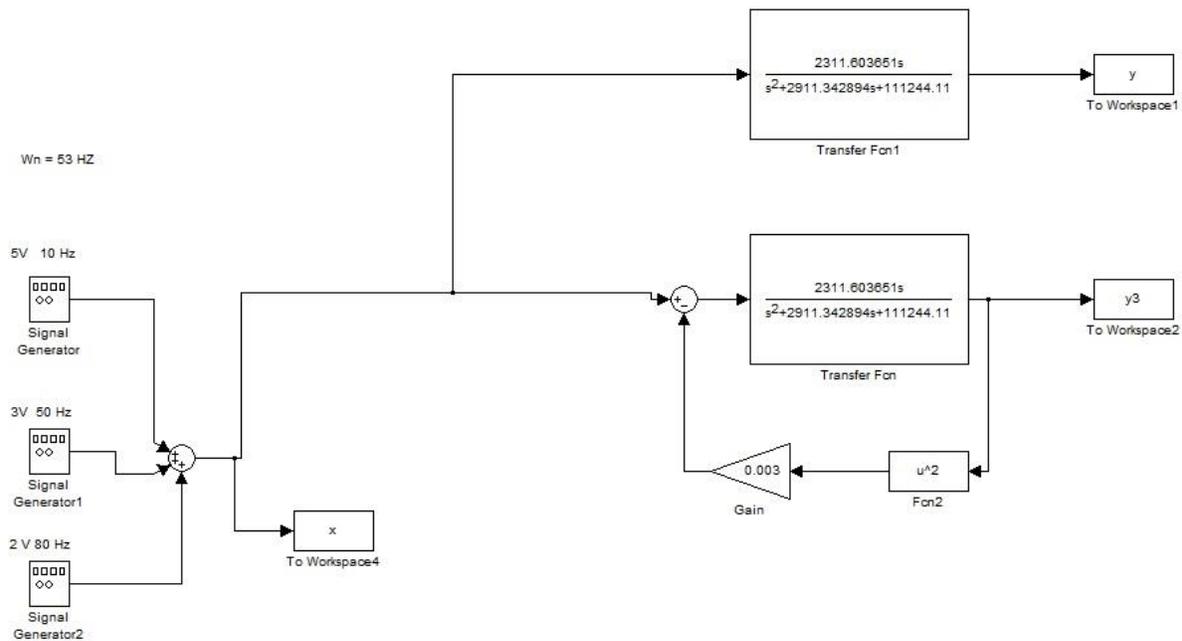


Figura.- 43 Simulación del sistema y sus respectivas FRF para la determinación del error

Se ensayaron varias ganancias hasta obtener una en la cual, el error debido a la no linealidad, sea como máximo del 5%, lo cual se obtuvo de una ganancia igual a 0.003

$$error = \sqrt{\frac{\sigma(y_3 - y)}{\sigma(y_3)}} \times 100$$

$$error = 5.1259$$

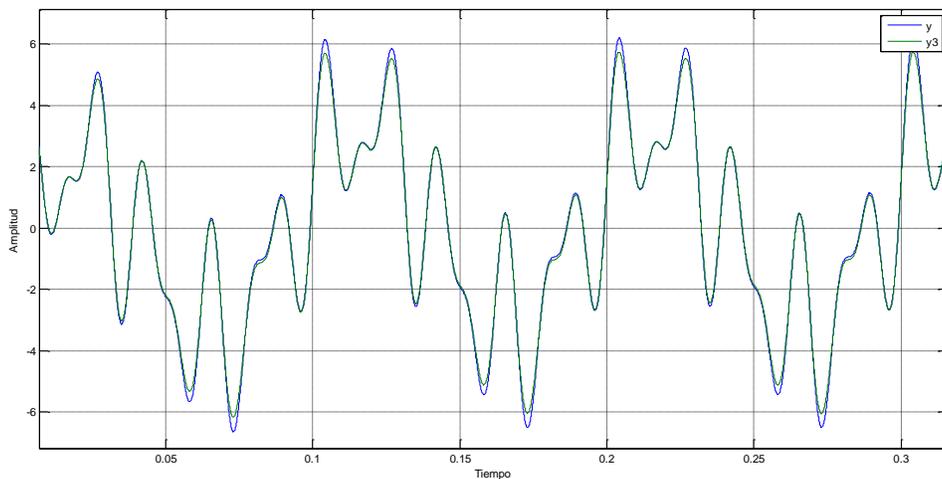


Figura.- 44 Error entre la señal lineal y la misma señal no lineal

Para el circuito eléctrico, el cual contendrá elementos lineales y no lineales variantes en el tiempo, se tiene ya la ecuación que lo rige de acuerdo a la primera ley de Kirchoff, siendo este modelo para un sistema LINEAL.

$$v = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + Ri$$

Con la no linealidad involucrada el modelo es el siguiente:

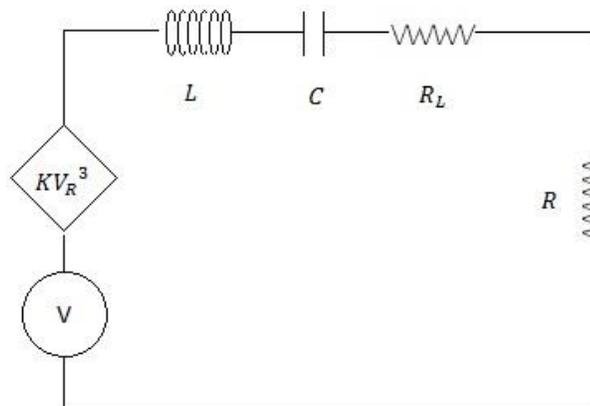


Figura.- 45 Circuito con retroalimentación añadida

La retroalimentación en serie se encuentra sumada entonces a la ecuación del modelo y a partir de él se aplica la serie de Volterra para determinar las Ecuaciones Lineales Asociadas.

$$V = i(R_L + R) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt + KV_R^3 \quad (5.13)$$

Expresando en términos de la salida de voltaje en la resistencia tenemos:

$$V = \frac{V_R}{R} (R_L + R) + \frac{L}{R} \frac{dV_R}{dt} + \frac{1}{CR} \int V_R dt + KV_R^3$$

$$\dot{V} = \dot{V}_R \left(\frac{R_L + R}{R} \right) + \frac{L}{R} \ddot{V}_R + \frac{1}{CR} V_R + 3KV_R^2 \dot{V}_R \quad \text{MODELO NO LINEAL DEL SISTEMA} \quad (5.14)$$

Es en este modelo no lineal a partir de cual se determinaran las ecuaciones lineales (ALES) asociadas al mismo. Expresando las sumatorias de Volterra correspondientes

$$\dot{V}_i = \frac{L}{R} \sum \ddot{V}_{Ri} + \left(\frac{R_L + R}{R} \right) \sum \dot{V}_{Ri} + \frac{1}{CR} \sum V_{Ri} + 3K \left(\sum V_{Ri} \right)^2 \left(\sum \dot{V}_{Ri} \right)$$

Desarrollando las sumatorias y considerando 5 operadores para la serie de Volterra, buscando precisamente obtener hasta la ALE de quinto orden, tenemos que

$$\dot{V}_i = \frac{L}{R} (\ddot{V}_{R1} + \ddot{V}_{R2} + \ddot{V}_{R3} + \ddot{V}_{R4} + \ddot{V}_{R5}) + \left(\frac{R_L + R}{L} \right) (\dot{V}_{R1} + \dot{V}_{R2} + \dot{V}_{R3} + \dot{V}_{R4} + \dot{V}_{R5}) + \frac{1}{CR} (V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4} + V_{R5}) + 3K(V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4} + V_{R5})^2 (\dot{V}_{R1} + \dot{V}_{R2} + \dot{V}_{R3} + \dot{V}_{R4} + \dot{V}_{R5})$$

Realizando la elevación al cuadrado del polinomio

$$(V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4} + V_{R5})^2 = V_{R1}^2 + V_{R2}^2 + V_{R3}^2 + V_{R4}^2 + V_{R5}^2 + 2V_{R1}V_{R2} + 2V_{R1}V_{R3} + 2V_{R1}V_{R4} + 2V_{R1}V_{R5} + 2V_{R2}V_{R3} + 2V_{R2}V_{R4} + 2V_{R2}V_{R5} + 2V_{R3}V_{R4} + 2V_{R3}V_{R5} + 2V_{R4}V_{R5}$$

De todos estos términos consideramos aquellos que son de un orden 4° como máximo, ya que al multiplicar por el paréntesis siguiente nos darán términos de 5° orden, entonces:

$$(V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} + V_{R4} + V_{R5})^2 = V_{R1}^2 + V_{R2}^2 + 2V_{R1}V_{R2} + 2V_{R1}V_{R3}$$

Multiplicando ahora, y considerando solo los productos resultantes de orden 5° o menores, tenemos que:

$$(V_{R1}^2 + V_{R2}^2 + 2V_{R1}V_{R2} + 2V_{R1}V_{R3}) (\dot{V}_{R1} + \dot{V}_{R2} + \dot{V}_{R3} + \dot{V}_{R4} + \dot{V}_{R5}) = V_{R1}^2 \dot{V}_{R1} + V_{R1}^2 \dot{V}_{R2}$$

$$\frac{L}{R}\ddot{V}_{R3} + \left(\frac{R_L+R}{R}\right)\dot{V}_{R3} + \frac{1}{CR}V_{R3} = -3KV_{R1}^2\dot{V}_{R1} \text{ ALE de tercer orden}$$

Para eliminar el término $\frac{L}{R}$, multiplicamos a toda la ale por el término $\frac{R}{L}$, obteniéndose lo siguiente:

$$V_{R3}'' + \left(\frac{R_L + R}{L}\right)V_{R3}' + \frac{1}{CL}V_{R3} = -3K\frac{R}{L}V_{R1}^2V_{R1}'$$

Si consideramos que $V_{R1}'^3 = 3V_{R1}^2V_{R1}'$, necesitamos introducir un término $\frac{3}{3}$, y de esta manera, la ecuación no se altera y se puede reescribir la ale de tercer orden como sigue:

$$V_{R3}'' + \left(\frac{R_L + R}{L}\right)V_{R3}' + \frac{1}{CL}V_{R3} = -3K\frac{R}{L}V_{R1}^2V_{R1}'$$

$$V_{R3}'' + \left(\frac{R_L + R}{L}\right)V_{R3}' + \frac{1}{CL}V_{R3} = -K\frac{R}{L}V_{R1}'^3$$

De igual forma se procede para el cálculo de la ALE de quinto orden considerando a los términos correspondientes, y tenemos que las ALEs de primero, tercero y quinto orden son:

$$\frac{L}{R}\ddot{V}_{R1} + \left(\frac{R_L+R}{R}\right)\dot{V}_{R1} + \frac{1}{CR}V_{R1} = \dot{V} \quad \text{ALE de primer orden} \quad (5.15)$$

$$\frac{L}{R}\ddot{V}_{R3} + \left(\frac{R_L+R}{R}\right)\dot{V}_{R3} + \frac{1}{CR}V_{R3} = -3KV_{R1}^2\dot{V}_{R1} \quad \text{ALE de tercer orden} \quad (5.16)$$

$$\frac{L}{R}\ddot{V}_{R5} + \left(\frac{R_L+R}{R}\right)\dot{V}_{R5} + \frac{1}{CR}V_{R5} = -3kV_{R1}^2V_{R3}' - 6kV_{R1}V_{R3}\dot{V}_{R1} \quad \text{Ale de quinto orden} \quad (5.17)$$

Cada una de las ALES asociadas, representa a un determinado orden armónico y de esta forma se observara qué ordenes armónicos están involucrados (o existen) en el sistema de acuerdo al modelo.

Se buscara la TFTC para cada una de las ecuaciones lineales asociadas para buscar así obtener una TFTC de varios grados de libertad al realizar el ensamble de todas las ALES del sistema variante en el tiempo.

5.2.-Introducción de la no linealidad para generar un sistema Oscilador Duffing.

Se diseñó y construyó un circuito con multiplicadores analógicos y amplificadores operacionales con el fin de retroalimentar al circuito una señal cúbica, lo cual permitirá que el sistema sea no lineal para su estudio.

El circuito multiplicador se muestra en la siguiente figura:

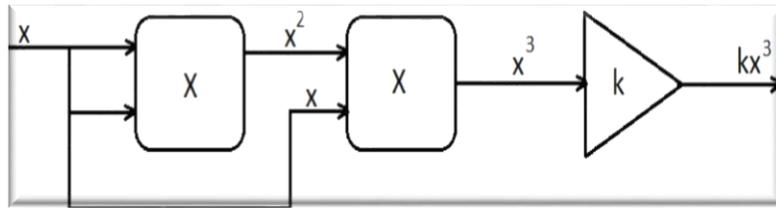


Figura.- 46 Diagrama de bloques del circuito multiplicador

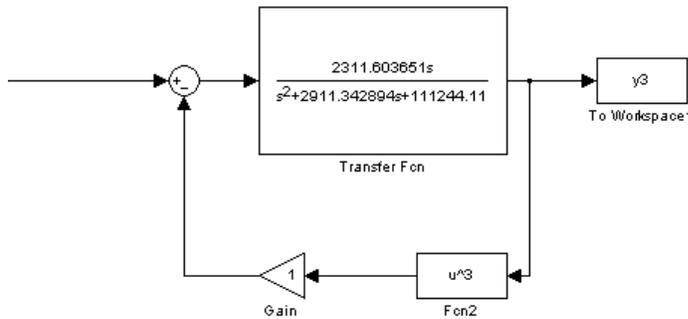


Figura.- 47 Diagrama de la FRF del sistema no lineal en donde se muestra la retroalimentación

Físicamente se construyó dicho bloque de retroalimentación como se muestra

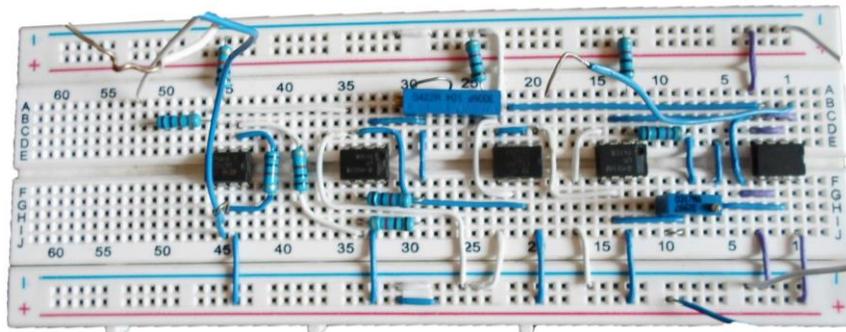


Figura.- 48 Construcción física de la no linealidad del sistema

5.3.- descripción del sistema electrónico

Se construyó un circuito eléctrico Resistencia-Inductor-Capacitor (RLC) en serie que será utilizado como el sistema de estudio. El circuito RLC estará constituido por diversas resistencias y capacitores de diferentes valores de capacidad a fin de hacer variable el circuito.

Cabe mencionar que la variabilidad del sistema en el tiempo se ejecutará mediante la activación-desactivación de switches conectados a los diferentes valores resistivos y capacitivos del circuito a fin de identificar los cambios en los parámetros medidos en cada caso.

Físicamente el circuito RLC se muestra en la figura siguiente, en la cual se logran apreciar los switches en color azul, los capacitores, el elemento inductivo utilizado y las diversas resistencias:

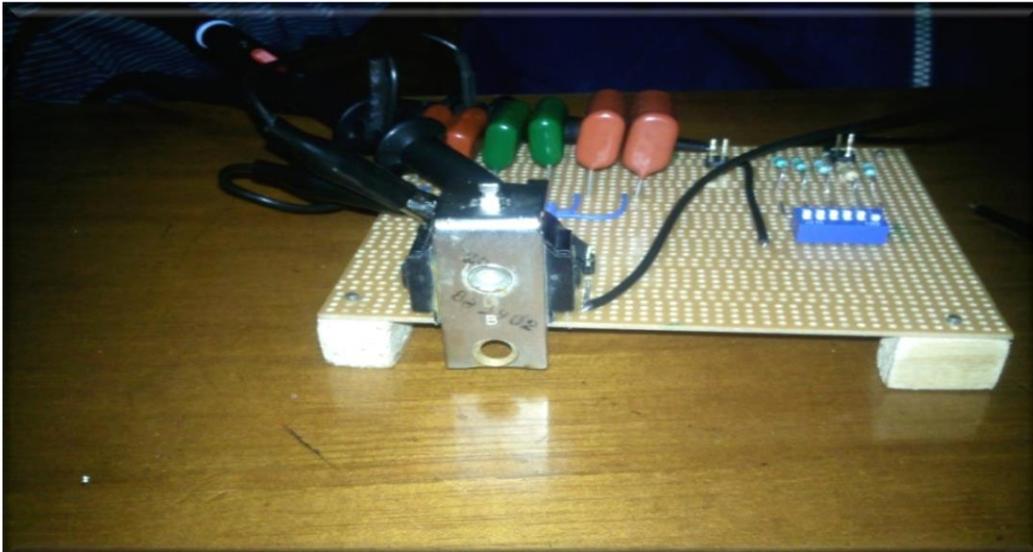


Figura.- 49 Circuito eléctrico RLC

Se tomarán valores de voltaje en el circuito y sus elementos tales como voltaje de entrada (a diferentes valores y frecuencias), voltaje pico a pico, etc., para construir una tabla de datos que posteriormente serán comparados (analizados) con respecto a lo obtenido en simulación mediante simulink en el software MATLAB.

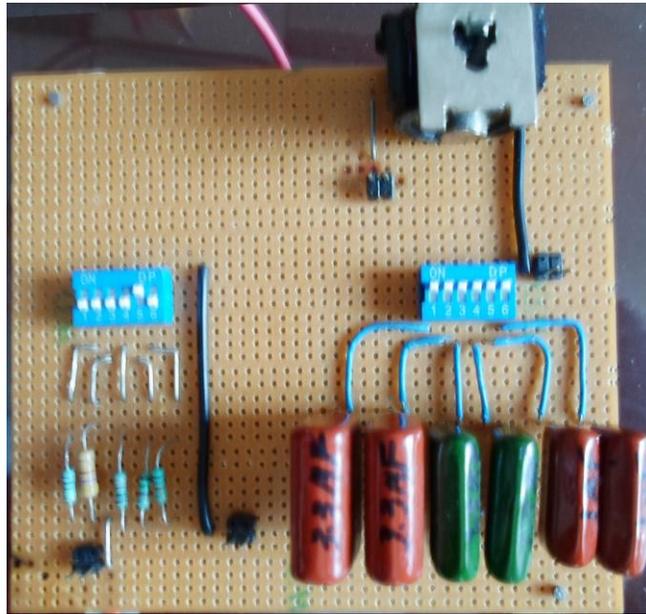


Figura.- 50 Vista superior del circuito RLC

El circuito RLC utilizado para el presente trabajo, a partir del cual se considera la señal de voltaje de salida de sus resistencias consta de un arreglo de resistencias de diversos valores conectadas a un switch, al igual que diversos capacitores de diferentes valores de capacidad y una bobina (inductancia) de un valor fijo asociado a una resistencia interna de la misma. El comportamiento del circuito es lineal, es decir, que cumple con las condicionantes de proporcionalidad y superposición.

Se añadió el bloque de la no linealidad descrito en el apartado 5.2 de este capítulo y con ello el sistema ahora es No lineal.

5.4.- Introducción de la variación de los parámetros del sistema en el tiempo

Todos los sistemas son variantes en el tiempo. Bajo ciertas condicionantes, se le puede considerar a un sistema como Invariante en el tiempo. Un sistema es variante en el tiempo cuando sus parámetros de operación varían conforme el tiempo avanza.

La variación de las frecuencias de operación en el sistema, son simuladas mediante programación en el software MATLAB.

Para la simulación se considero la variación del valor de la capacitancia del circuito, lo cual hace que, en la expresión de la FRF correspondiente al modelo Duffing que representa al circuito eléctrico, el valor del último término $\frac{1}{LC}$, se modifique, y con este cambio de valor en la capacitancia "C", el valor de la frecuencia natural, determinada a partir de

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

se vea modificado, simulándose así la variación de los parámetros del sistema con el tiempo.

Así, la entrada "x" al sistema es simulada mediante un generador de señales, en este caso, una señal aleatoria de ruido blanco con una amplitud de 60 y una frecuencia de 100 Hz:

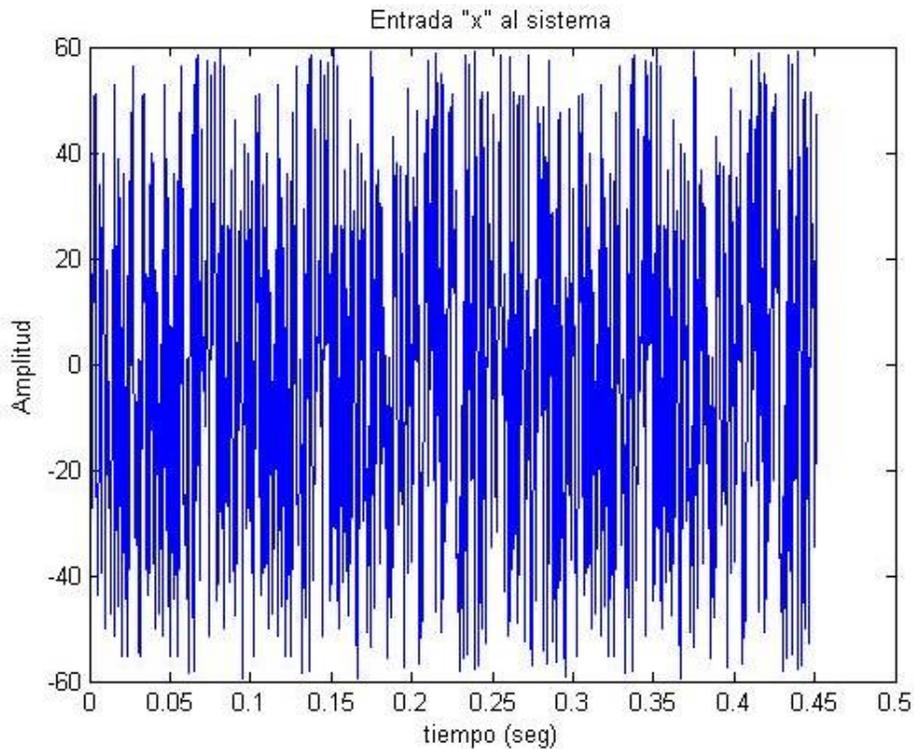


Figura.- 51 Entrada al sistema "x"

Siendo la salida “y” del primer operador de Volterra la siguiente, observándose en ella la variación de las frecuencias de salida.

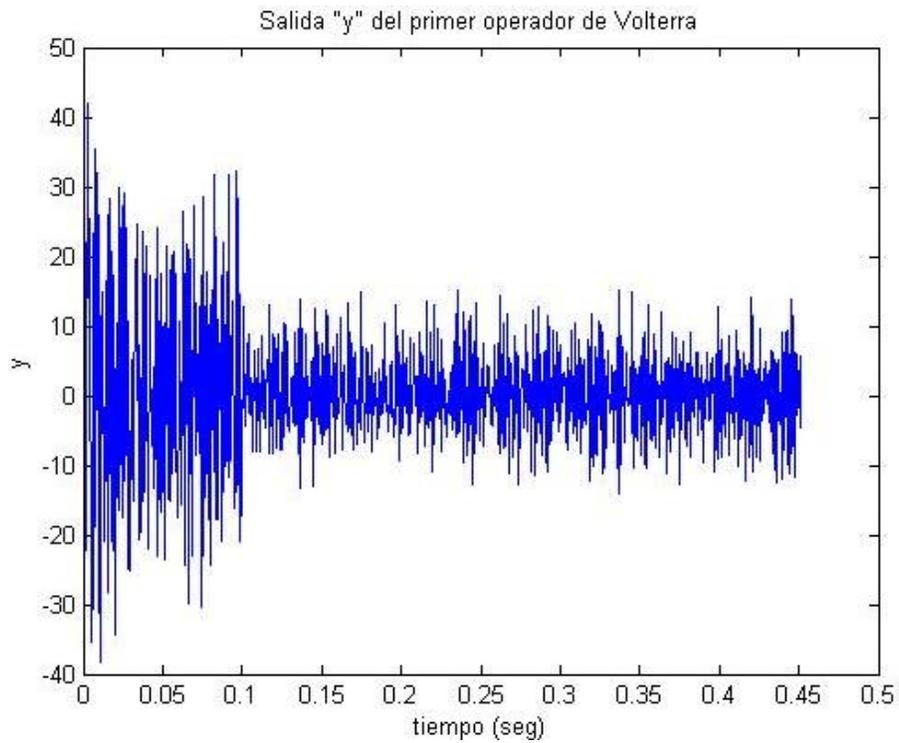


Figura.- 52 Salida del primer operador

Realizando la TFTC de la entrada “x”, se puede apreciar el cambio en las tonalidades, siendo esto señal de la variación de la entrada debido a la transformada

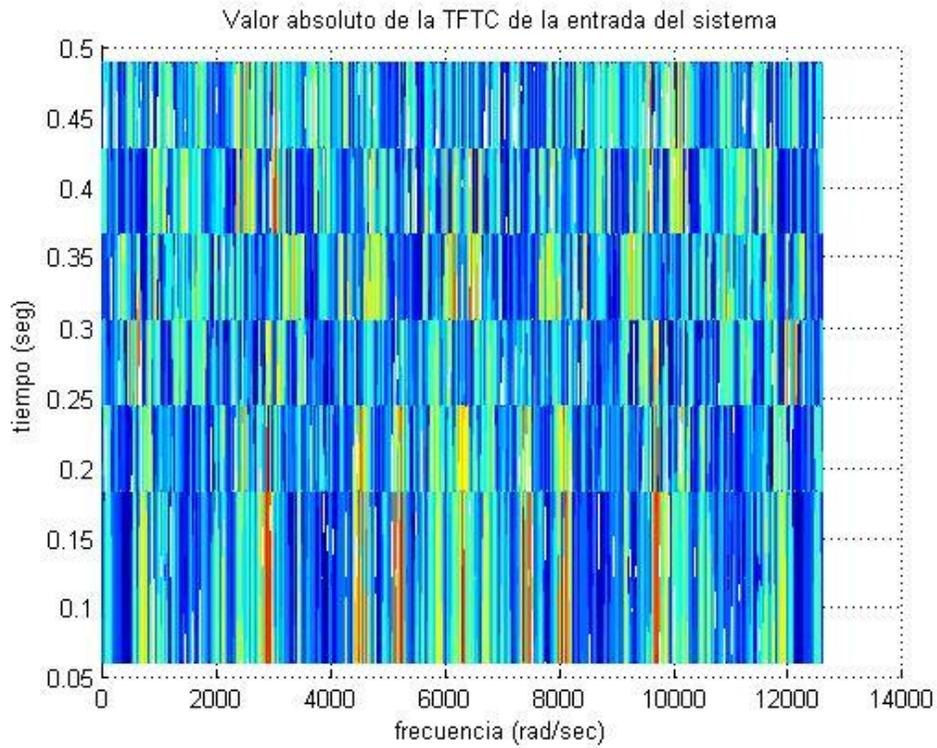


Figura.- 53 TFTC de la entrada al sistema

Al igual que el proceso descrito en el capítulo IV, se debe determinar el ratio para la obtención de la correspondiente FRF de primer orden, correspondiente a la ALE de primer orden. Para ello, es necesario, aparte de contar con la transformada “X1”, determinar la transformada respectiva de la salida de la ALE de primer orden es decir, la transformada “Y1” de la salida “y”:

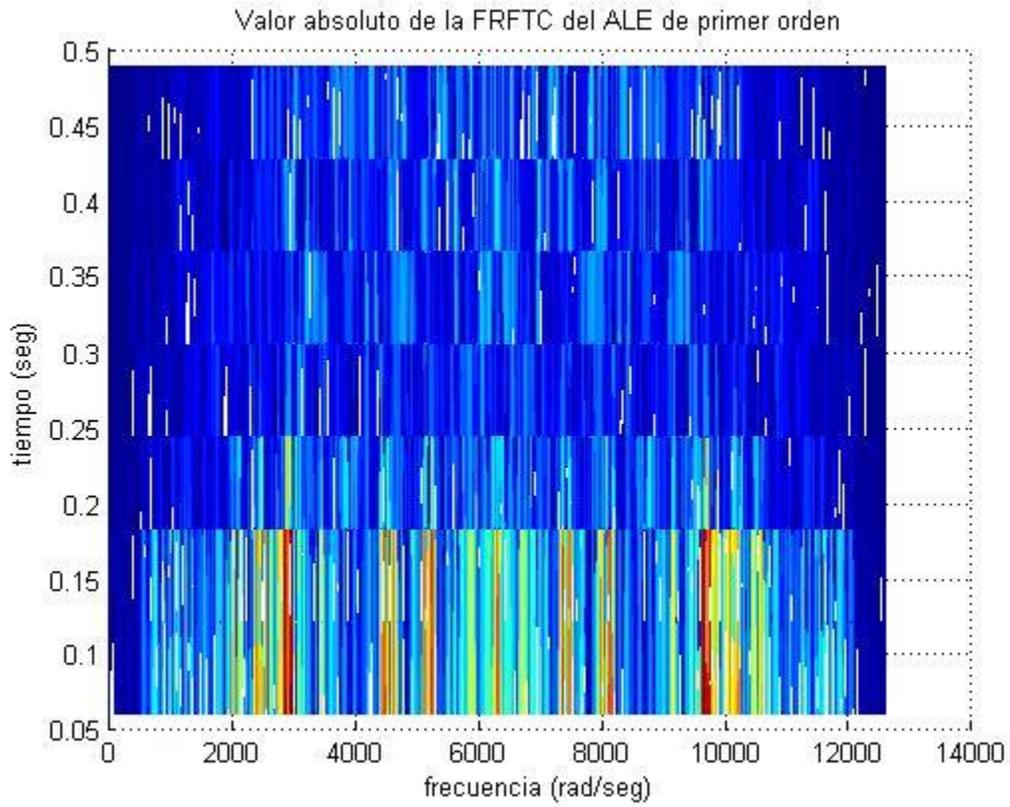


Figura.- 54 FRFTC de la Ale de primer orden

El ratio, esta vez, entre las transformadas de los valores simulados se presenta en la gráfica siguiente:

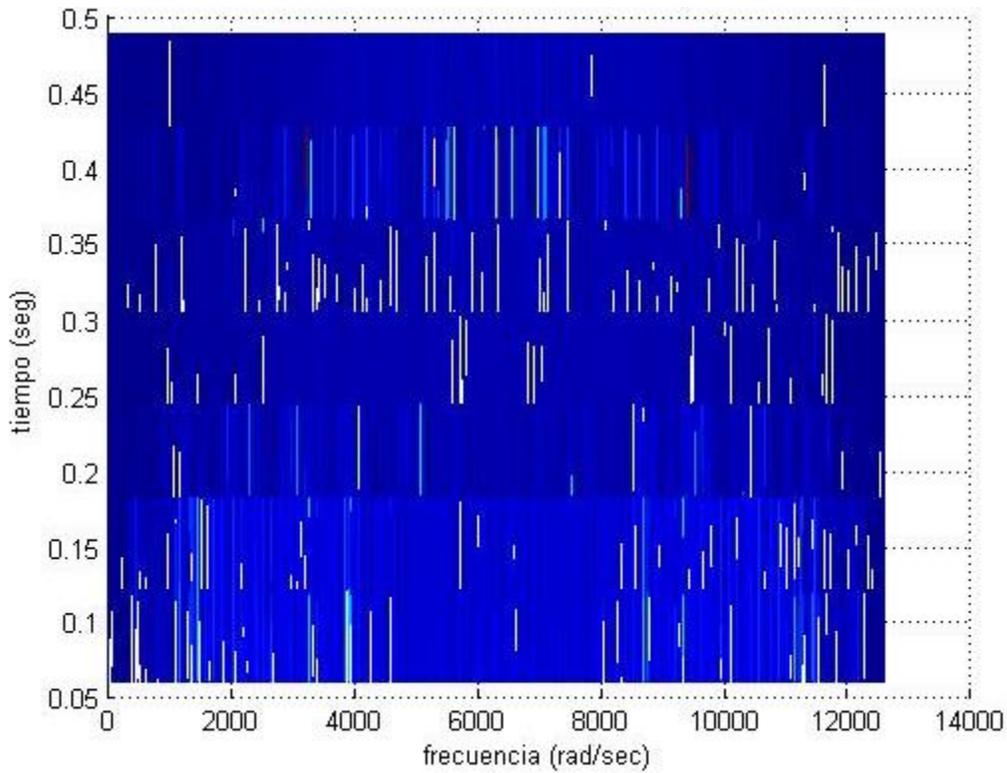


Figura.- 55 Ratio entre transformadas Salida/entrada

Esta es la FRF de primer orden.

Para la ALE de segundo orden, la entrada “ x_2 ” está determinada a partir de la entrada “ y_1 ” elevada al cuadrado como se mencionó anteriormente:

$$x_2 = y_1^2$$

La entrada para el segundo operador de Volterra entonces, viene influenciada ya por la FRF de primer orden, observándose su grafica como sigue:

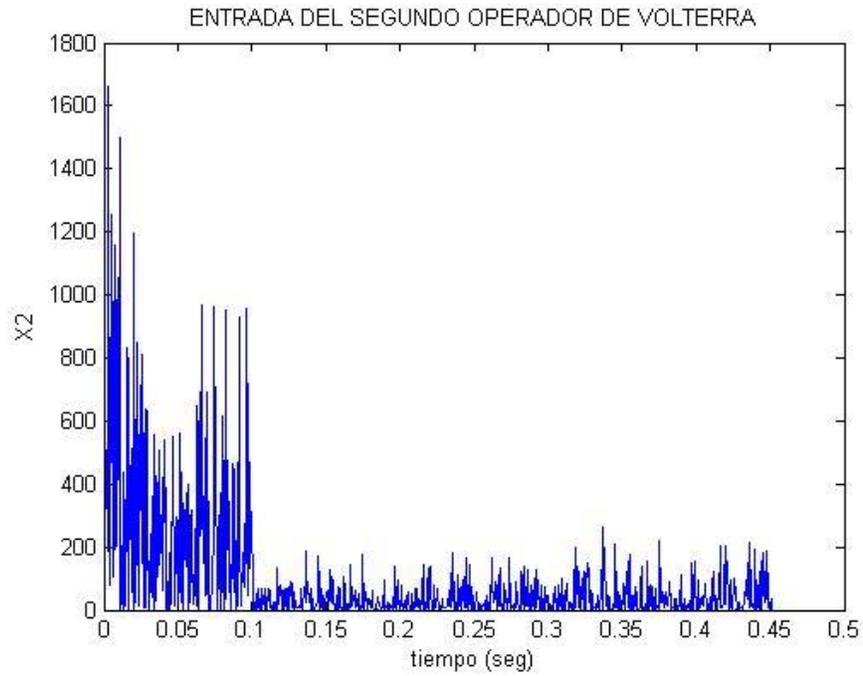


Figura.- 56 Entrada del segundo operador de Volterra

Y su correspondiente salida afectada por la FRF de segundo orden es:

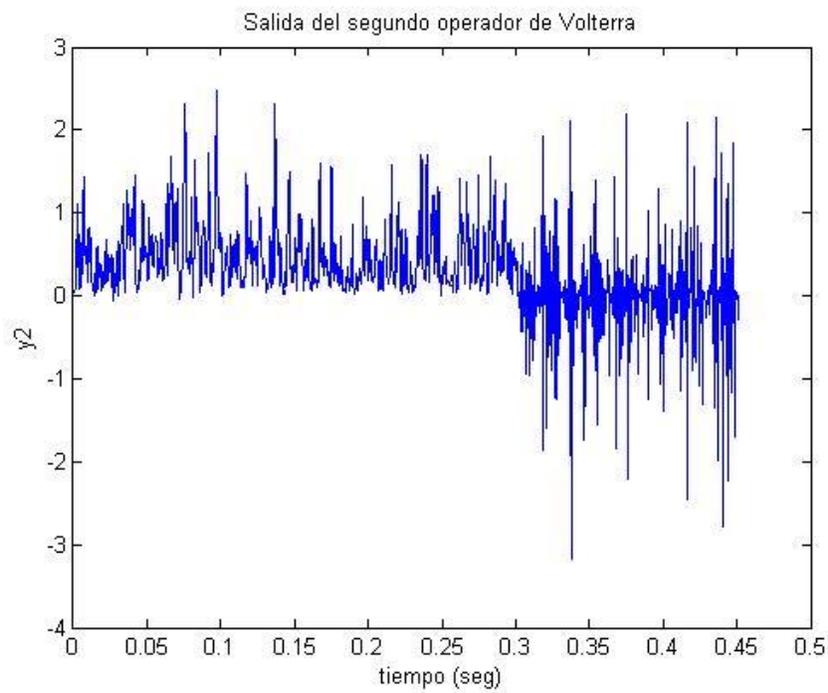


Figura.- 57 Salida del segundo operador de Volterra

CAPITULO VI

6. Conclusiones.

Conclusiones y recomendaciones

Las ecuaciones lineales asociadas al modelo matemático que representa a un sistema, son por naturaleza modelos lineales. Para sistemas de primer orden, la ALE asociada a dicho orden determina la FRF, la cual está en función del impulso unitario.

Los Kernels de orden superior están relacionados con la función de respuesta al impulso unitario de la ALE de orden correspondiente a través de una convolución de la función de respuesta al impulso unitario con los correspondientes kernel de bajo orden que produce la entrada de orden n . Solo se requiere una sola convolución no importando el orden del kernel que se trate.

Así, para realizar la transformada de tiempo corto de Fourier es necesaria la introducción de una función ventana que vaya “barriendo” a la señal a analizar, para ordenes mayores al primero es necesario incrementar el número de ventanas en igual número al orden del cual se trate.

De acuerdo a la planeación y metodología utilizada para el presente trabajo, y dado que los sistemas de Volterra son de 3 tipos, el tiempo no fue el suficiente para lograr los objetivos planteados en cada uno de estos 3 modelos (lo cual sería lo ideal), sin embargo el trabajo realizado cumple en cada uno de los objetivos de forma exclusiva para el modelo Duffing.

De igual forma, el trabajo de programación de operadores para el software MATLAB, el cual realiza sus cálculos para una sola dimensión, fue muy extenso y, debido a que parte fundamental de esta tesis era conseguir la operación de la transformada corta de Fourier en “ n ” dimensiones, el consumo de tiempo horas-hombre, impidió por el momento poder realizar cálculos y pruebas para los otros dos modelos de Volterra, sin embargo se expone aquí gran parte de lo logrado con el fin de que el presente trabajo pueda ser motivo de seguimiento y utilidad para aquellos que gusten tener bases para lograr el trabajo en “ n ” dimensiones en los otros modelos de Volterra.

Dado que las FRF's de alto orden, se ven influenciadas por los órdenes menores a ellas, los tp 's empleados para cada una de las ventanas utilizadas en las respectivas transformadas influyen de igual forma en dichas FRF's. Es por ello que para la determinación de operadores de orden mayor al primero, las posibles combinaciones de los tp 's empleados influyen unos con otros, dando como consecuencia un número “ n -ésimo” de dimensiones en los resultados.

Debido a la multidimensionalidad de los resultados, la presentación de éstos en forma gráfica se debe de efectuar de forma “desglosada”, presentándose relaciones de tp 's uno a uno de tal forma que las gráficas en su conjunto, representan a todos los tp 's involucrados en el resultado.

De forma general, y siguiendo la lógica presentada en los resultados obtenidos para H2, se observa que H3, la cual está en función de $2y_1y_2$, utilizaría 5 ventanas, las tres correspondientes a y_2 , la correspondiente a y_1 y, como en H3 influyen ordenes menores, también la correspondiente a $h_{1(2)}$.

De acuerdo a la teoría desarrollada, así como la programación efectuada para su realización, los datos experimentales fueron efectivamente trabajados de forma que los resultados obtenidos son justo los pretendidos.

Se recomienda tomar como base el trabajo realizado en el presente documento, para lograr los objetivos planteados en los modelos Hammerstein y Wiener de Volterra.

Es también recomendable, considerar el aplicar los resultados obtenidos en el presente trabajo, efectuados mediante un circuito eléctrico RLC, a otro tipo de sistemas mecánicos, electrónicos, etc, y comparar los resultados obtenidos con los aquí expuestos, ya que, dada una señal, es posible realizar la transformada de tiempo corto de Fourier de cualquier orden.

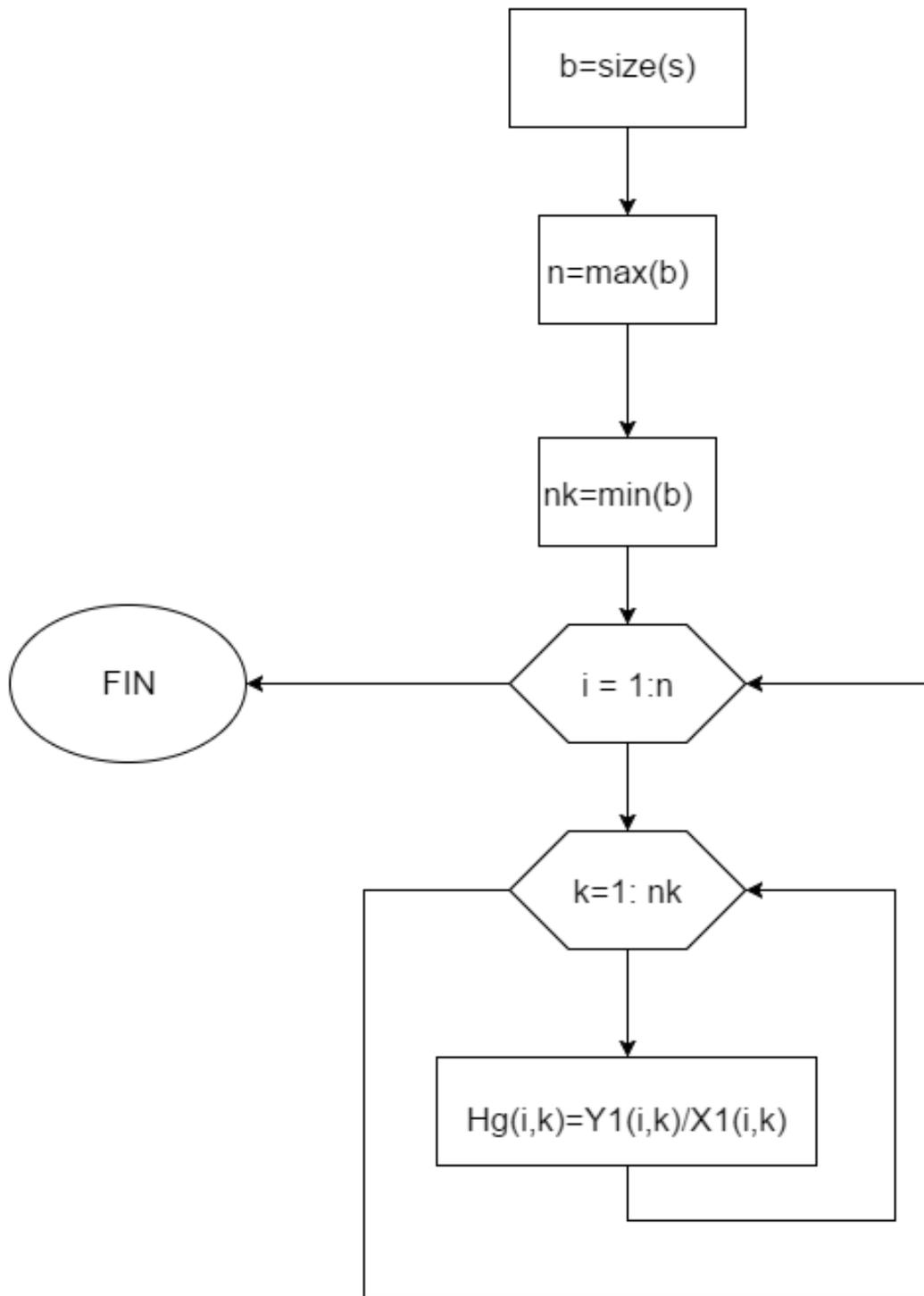
REFERENCIAS

Bibliografía

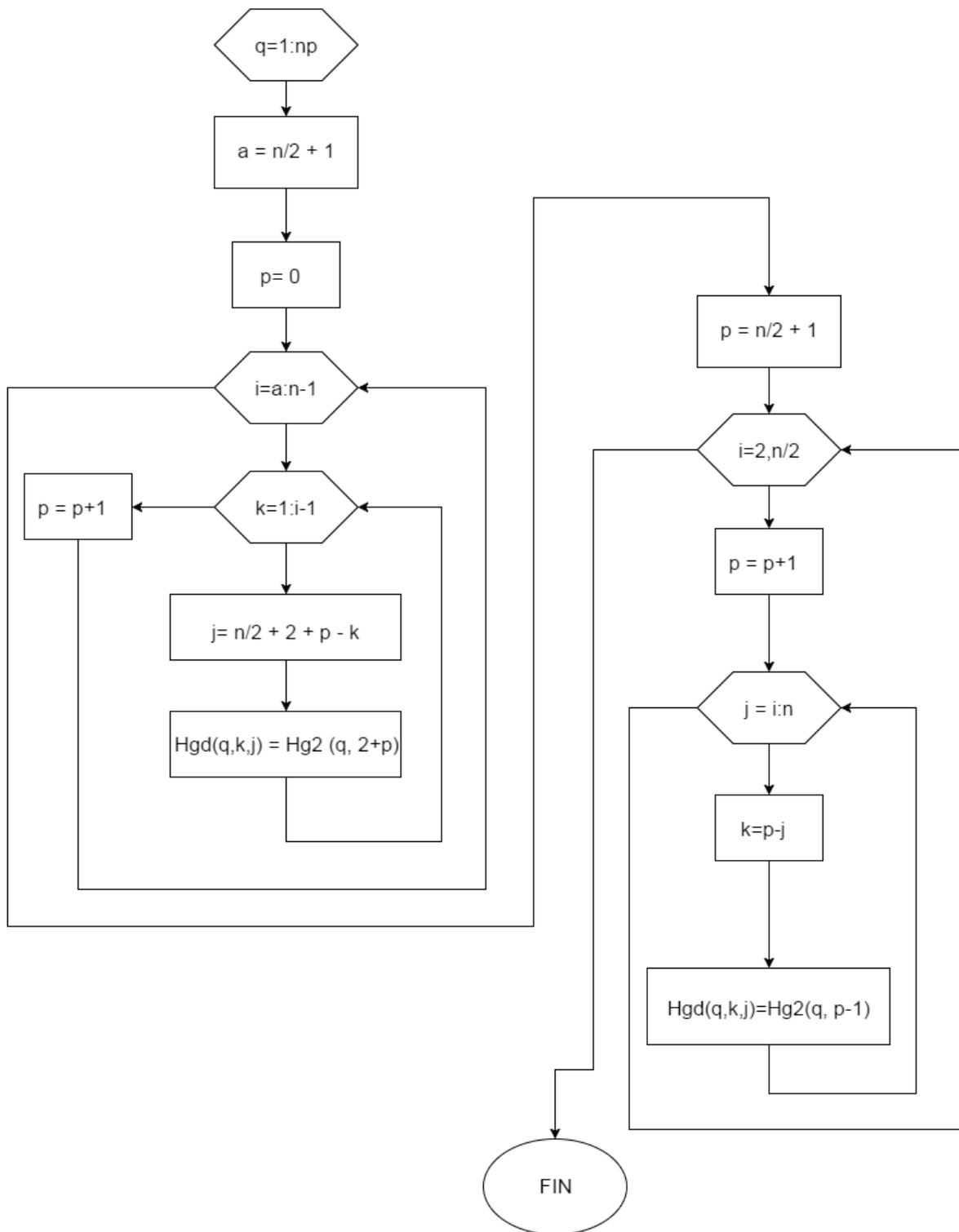
- Halawa, K. (2008). Determining the weights of a fourier series neural network on the basis of the multidimensional discrete fourier transform. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 369 - 375.
- Babatunde, A., Pearson, R. K., Francis, J., & Doyle, I. (2002). *Identification and Control Using Volterra Models*. Inglaterra: Springer London.
- Bin , Z., Billings , S., Zi-Qiang, L., & Tomlinson. (2009). Analytical Description of the Frequency Response Function of the Generalized Higher Order Duffing Oscillator Model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 224 - 232.
- Chikkerur, S., Cartwright, A., & Govindaraju, V. (2007). Fingerprint enhancement using STFT analysis. *Pattern Recognition*, 198-211.
- Flores Serrano, E. G., Cardona, F. S., & Nebot, L. J. (2012). Use of the STFT in the Vibration Analisis to Detect and Characterice Defects at the Wheels Surface of a Train. *Revista de Ingeniería*, 6-11.
- Galignani, M., Torres, M., Ayala, C., & Brunetto, M. (2008). Determinación de cafeína en café mediante espectrometría infrarroja de transformada de Fourier. *Revista Tecnica de la Facultad de Ingenieria Universidad del Zulia*, 159-168.
- Goncalves, I. B., Leiria, A., & Moura, M. (2013). STFT or CWT for the detection of Doppler ultrasound embolic signals. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 964 - 976.
- Malo de Molina, J. A., Velazco, S., Pacheco, V., & Robledo, J. C. (2012). Análisis de las vocalizaciones del murciélago longirrostro peruano *Platalina genovensium* Thomas, 1928 (Chiroptera: Phyllostomidae). *Revista Peruana de Biología*, 311-318.
- Montoro López, G. (14 de Noviembre de 1996). Contribución al estudio y desarrollo de técnicas de control aplicadas a la linealización de sistemas. *Universitat Politècnica de Catalunya. Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions*. España.
- Nese, S., Kilic, O., & Akinci, T. (2012). Analysis of wind turbine blade deformation with STFT method. *JOURNAL OF VIBROENGINEERING*, 679 - 686.
- Schetzen, M. (1989). The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. *R.E. Krieger Pub. Co*, 573.

- Tsz, K. T., Xiao-Ping, Z., & Androutsos, D. (2008). Color Image Watermarking Using Multidimensional Fourier Transforms. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, 16-28.
- Vazquez Feijoo, J. A., Worden, K., & Stanway, R. (2004). System identification using linear equations. *Dynamics Research group*, 18, 431-435.
- Vazquez Feijoo, J. A., Worden, K., & Stanway, R. (2005). Associated Linear Equations for Volterra operators. *Mechanical Systems and signal processing*, 57-69.
- Worden, K., Manson, G., & Tomlinson, G. (1997). A HARMONIC PROBING ALGORITHM FOR THE MULTI-INPUT VOLTERRA SERIES. *Journal of Sound and Vibration*, 67 - 84.

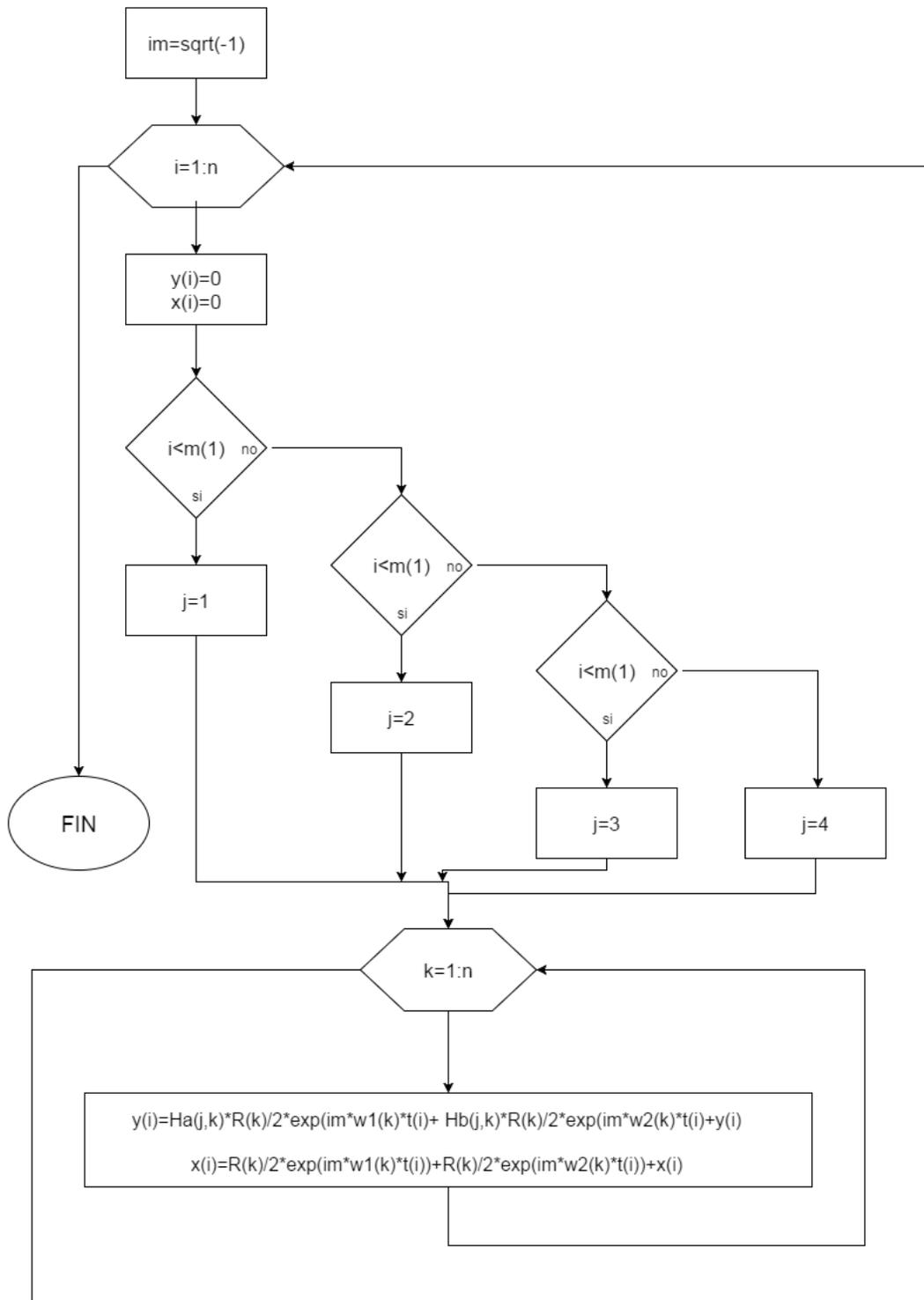
APÉNDICE I.-Diagramas de flujo



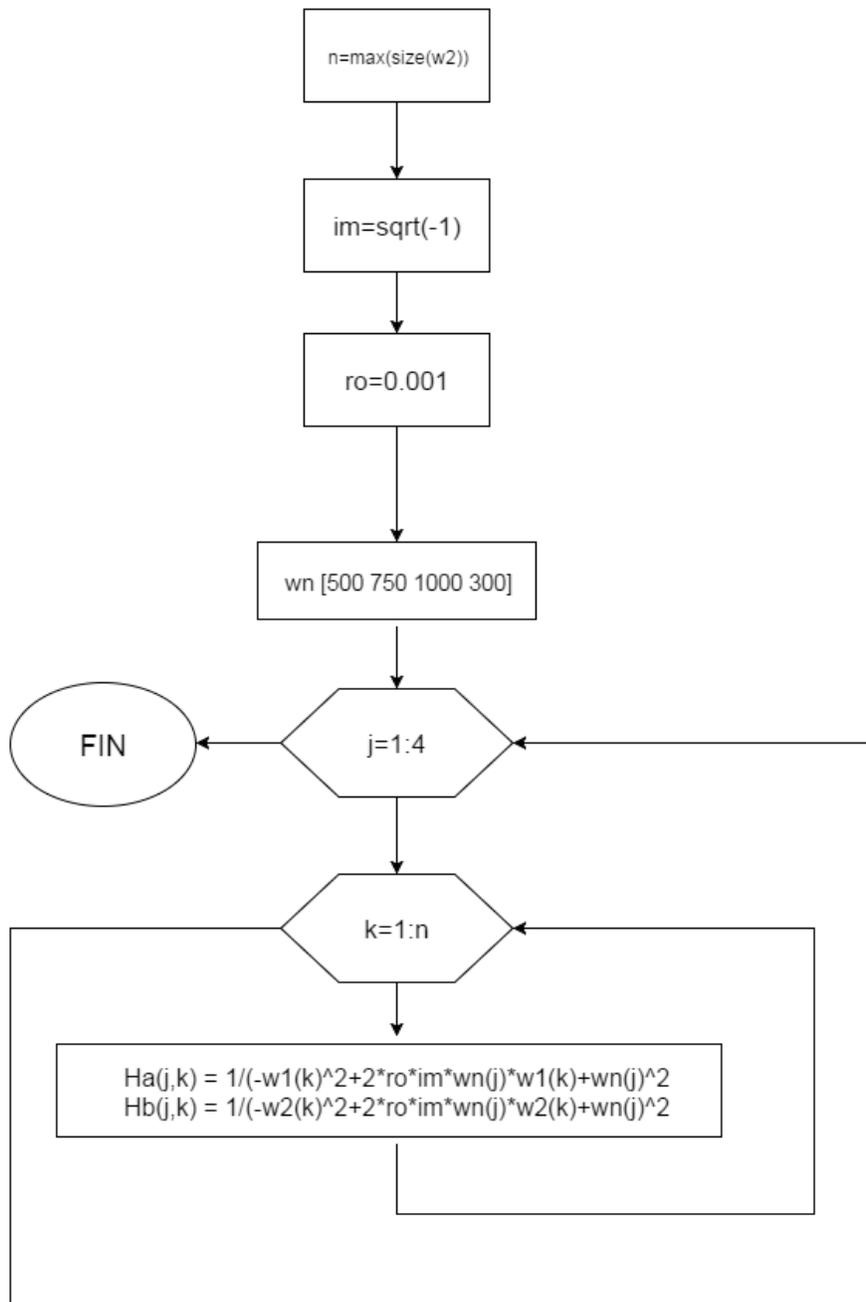
Cociente de transformadas (Ratio)



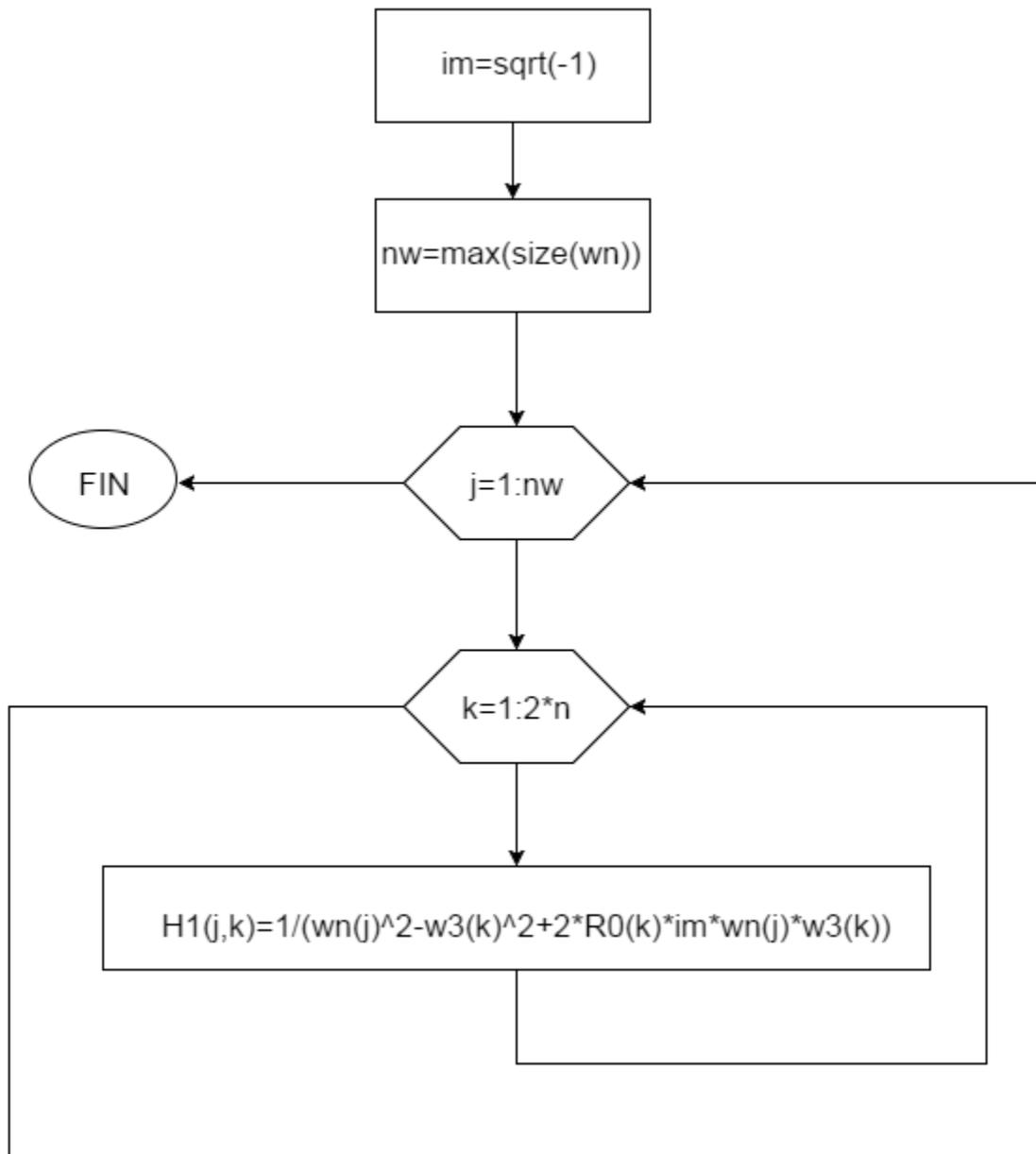
Diagonales de influencia del operador de Segundo orden



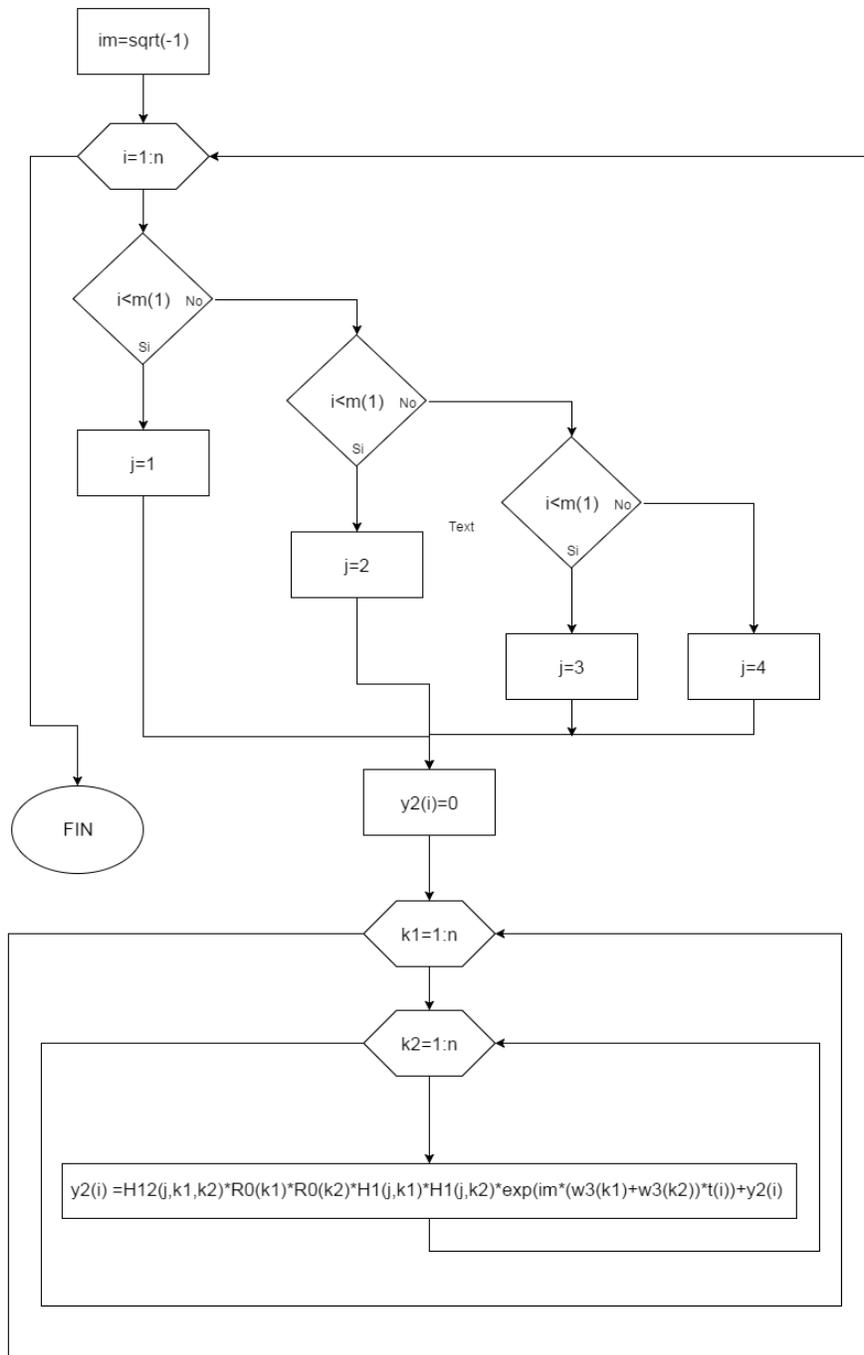
*Obtención de entrada y salida con
Modificación de frecuencia y tiempo*



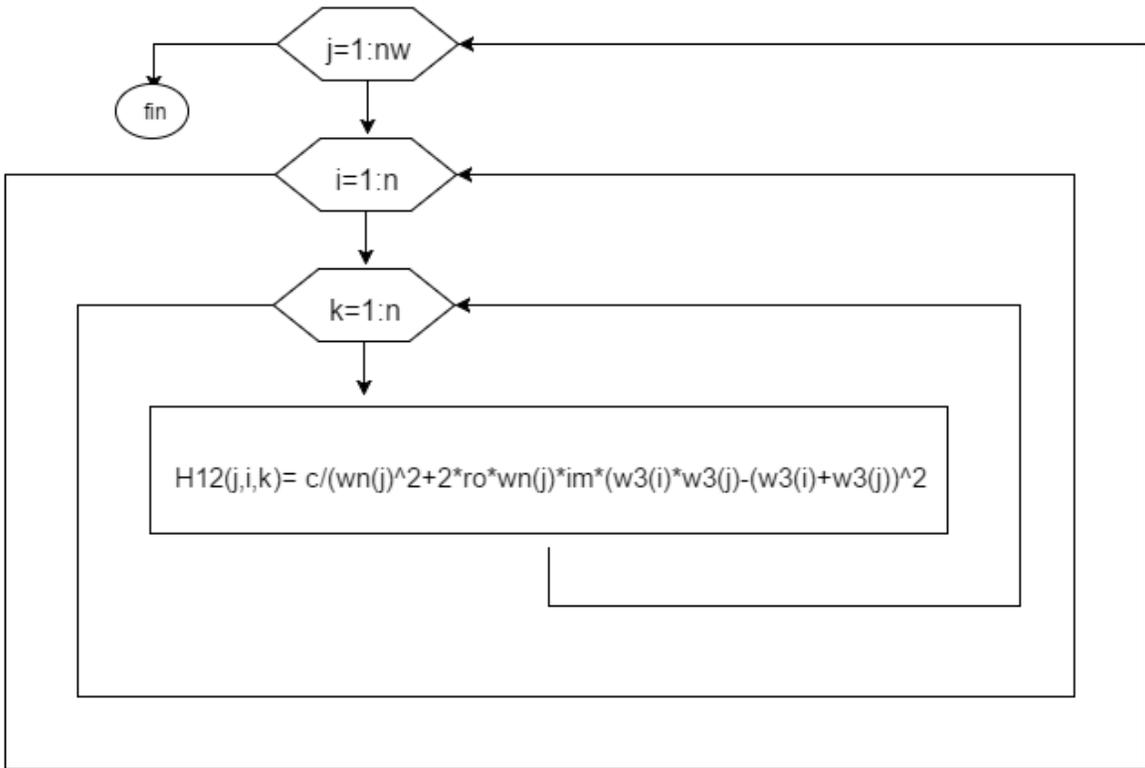
Modificación de frecuencias



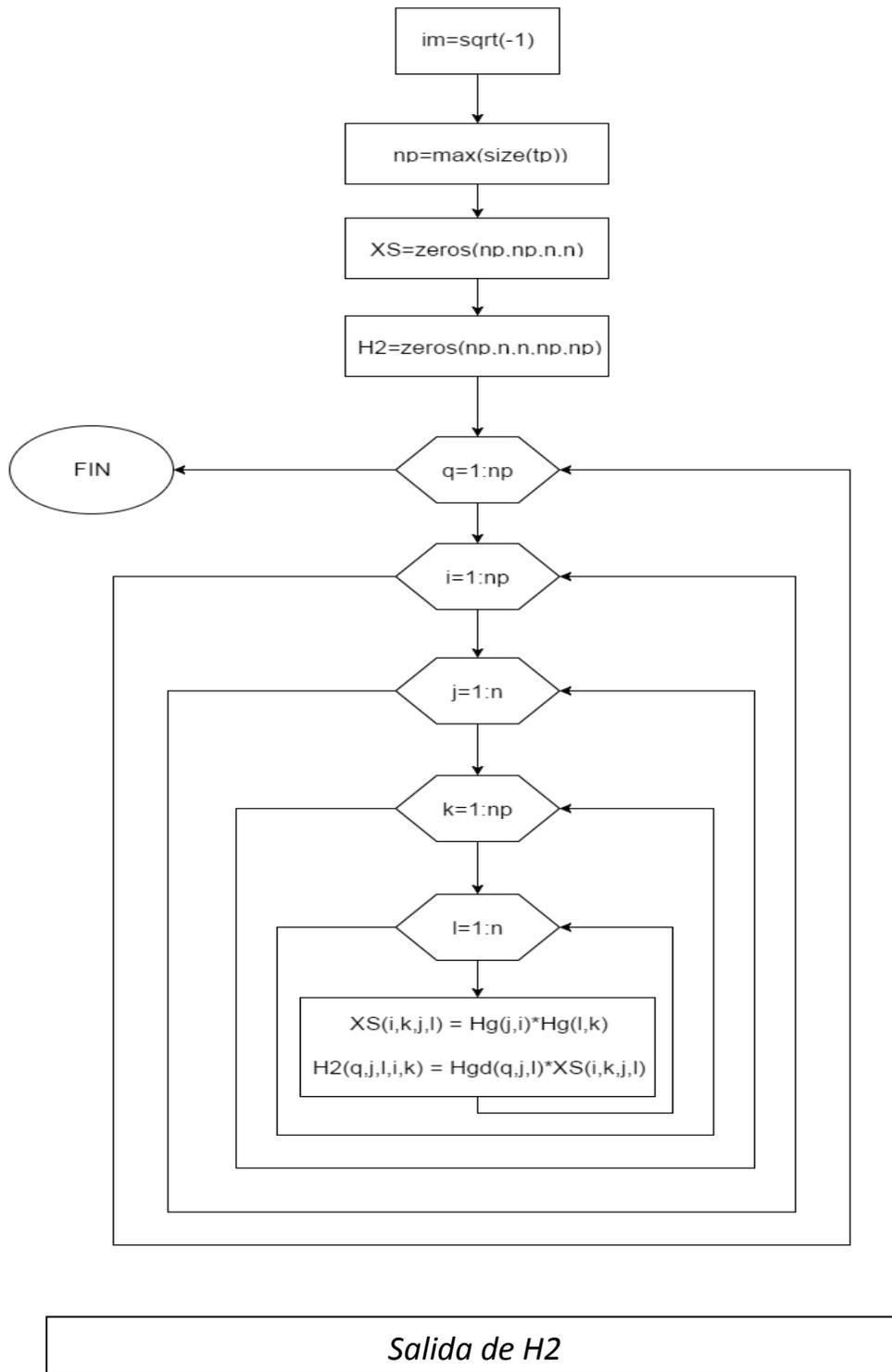
Operador de primer orden

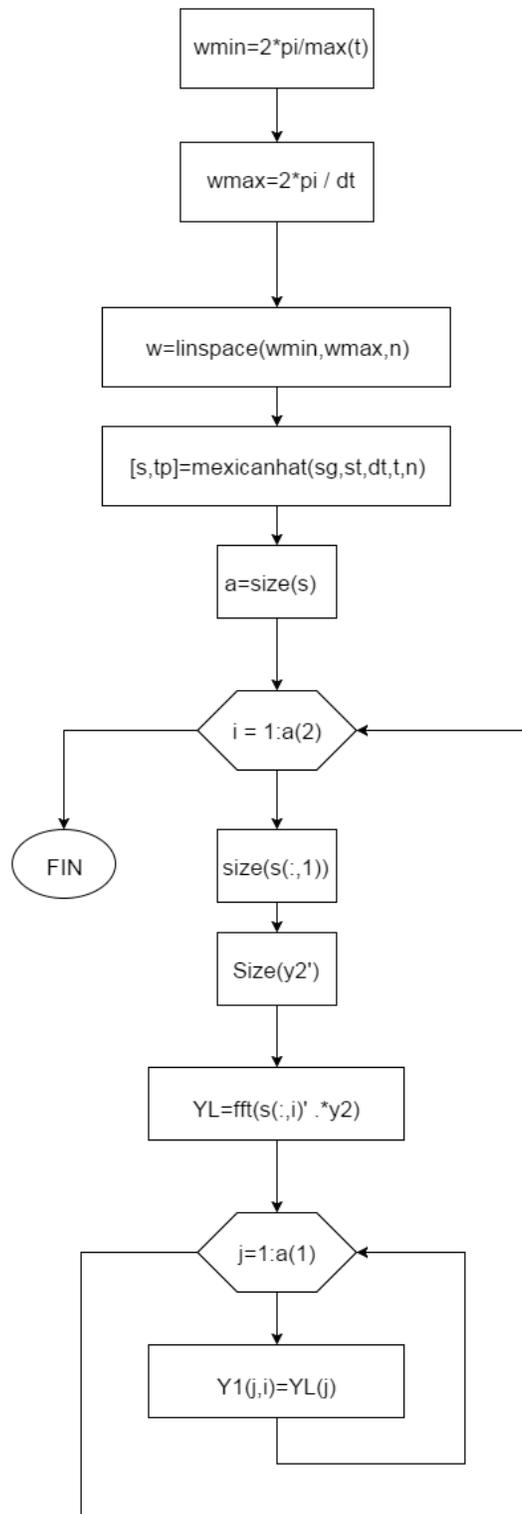


Salida de Segundo orden

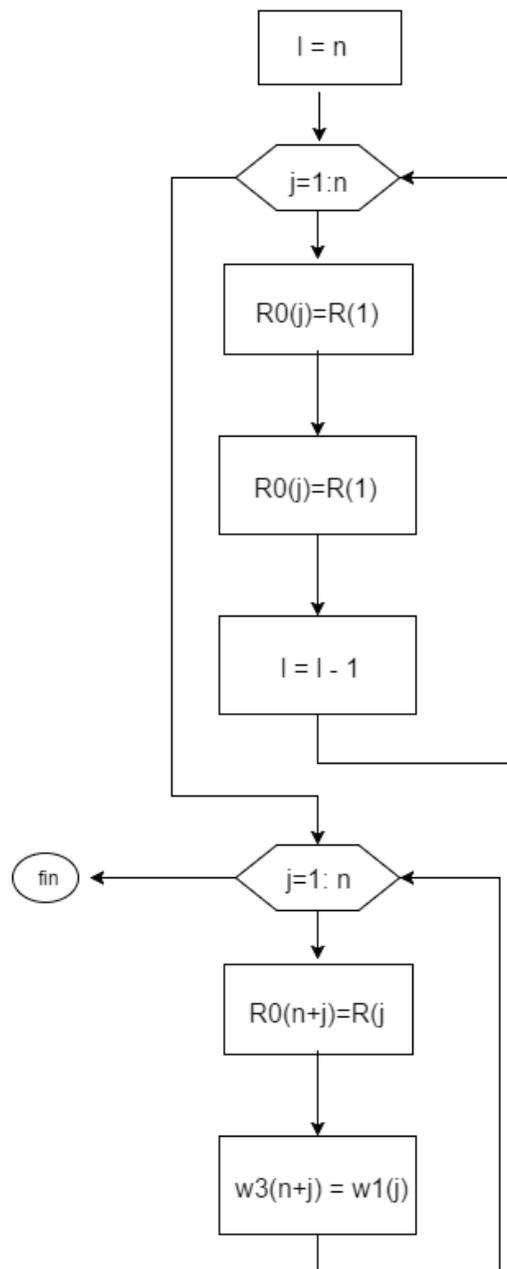


Salida de H12





TFTC



Vector de frecuencias

APÉNDICE II.-Nomenclatura

Símbolo	Representa
δ	Function Delta de Dirac
∞	infinito
Δ	Incremento
π	Valor constante 3.1416
τ	Determinado instante de tiempo
ω	Frecuencia
t	Tiempo
H	Operador de Volterra
H_n	Operador de orden "n"
$H_{1(2)}$	Operador de orden 1 dependiente de 2 frecuencias
Ω	Unidad de medida resistiva
\dot{y}	Primer derivada
\ddot{y}	Segunda derivada
dt	Diferencial de tiempo
\mathcal{F}	Transformada de Fourier
Σ	Sumatoria
e	Función exponencial
h	Función impuls unitario

Símbolo	Representa
ζ	Factor de amortiguamiento
ϕ	Funciónventana
Sen	Funcióntrigonométricaseno
T	Periodo de la función
ω_n	Frecuencia Natural
R	Resistencia electrica
R_L	Resistencia asociada a la inductancia
L	Inductancia
C	Capacitancia
i	Corriente
V	Voltaje
K	Ganancia de retroalimentación
Ψ	Ondícula
η	frf en funcion del tiempo
μ	Media
σ	Varianza